Módulo 19

Dinámica en la naturaleza: el movimiento

UNIDAD I

Expresiones matemáticas y lugares geométricos

CONTENIDO EN EXTENSO

Prepa en línea SEP

CONTENIDO

Guía de navegación

En este documento encontrarás gran cantidad de información, lo cual demanda generar estrategias de aprendizaje, para analizarla y que te apropies de los conocimientos haciéndolos útiles para tu entorno. Por ello, te proporcionamos la siguiente guía de navegación para darle un mejor uso al contenido, describiendo los íconos que te permitirán relacionar cada uno de estos elementos.

Con este ícono identificarás algún **Tip de aprendizaje**, es decir, sugerencias de cómo reforzar tu aprendizaje, a partir de algunas actividades propuestas.

Cuando encuentres este ícono, distinguirás los **¿Sabías qué?**, mediante datos curiosos que te permitirán conocer información adicional sobre el contenido revisado.

Mediante esta imagen encontrarás **Vocabulario**, que puede ir desde palabras nuevas y definiciones hasta datos biográficos de personajes importantes, que te ayudarán a responder algunas actividades o tareas.

Cuando veas este ícono, será momento de conocer algo más **Acerca de** lo que estás leyendo en ese momento, es decir, de profundizar sobre el contenido de tu lectura.

Para cuando quieres conocer más información sobre el contenido que estés leyendo, en recursos de internet, donde se aborda más a profundidad lo revisado, encontrarás este símbolo **Para saber más**.

Para encontrar algunos ejemplos contextualizados, reflexiones o preguntas detonadoras sobre el contenido que estás revisando, podrás reconocer este símbolo, con el cual descubrirás **Mi mundo y yo**.

Unidad I. Expresiones matemáticas y lugares geométricos

Presentación

En esta unidad revisarás temas relacionados al espacio y a cómo nos localizamos, así como el movimiento constante y cómo lo representamos y analizamos en distintos ámbitos y, a partir de ello, desarrollarás las competencias necesarias que plantea el perfil de egreso en la Educación Media Superior, es decir, para que apliques de manera efectiva tus conocimientos, habilidades y actitudes en situaciones o problemas concretos.

Propósito

Utilizar métodos gráficos y matemáticos para representar y resolver situaciones relacionadas con el movimiento.

Aprendizajes esperados

- Utiliza métodos algebraicos, gráficos y trigonométricos en la solución e interpretación de problemas prácticos de situaciones de su entorno relativos a los diferentes tipos de movimiento.
- Reconoce el aula como una comunidad de aprendizaje en la que cada alumno aporta conocimiento de distintas representaciones matemáticas de su entorno.
- Caracteriza a las relaciones trigonométricas según sus disposiciones, propiedades y las relaciones existentes entre ellas.
- Interpreta y construye las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo de acuerdo al teorema de Pitágoras.
- Analiza al círculo trigonométrico y describe sus funciones angulares, realiza mediciones, comparaciones y deduce las relaciones trigonométricas, así como el valor de éstas para ángulos representativos.
- Construye e interpreta gráficas de vectores de situaciones problemáticas.
- Emite y fundamenta por escrito una opinión original sobre distintas magnitudes físicas.
- Identifica variables y constantes en las relaciones y funciones que expresan la primera, segunda y tercera ley de Newton en fenómenos físicos observables en situaciones de su entorno.
- Construye e interpreta gráficas de desplazamiento-tiempo, velocidad-tiempo para diferenciar los tipos de movimientos y relacionarlos con situaciones de su entorno.
- Utiliza *software* matemático para la representación e interpretación del movimiento rectilíneo.
- Utiliza *software* matemático para la representación e interpretación de las leyes de Newton de fenómenos físicos observables en su vida cotidiana.
- Examina las limitaciones, veracidad y aportaciones de distintas fuentes de información en la red relacionadas con la aplicación de las matemáticas para explicar el fenómeno físico del movimiento.

Punto de partida

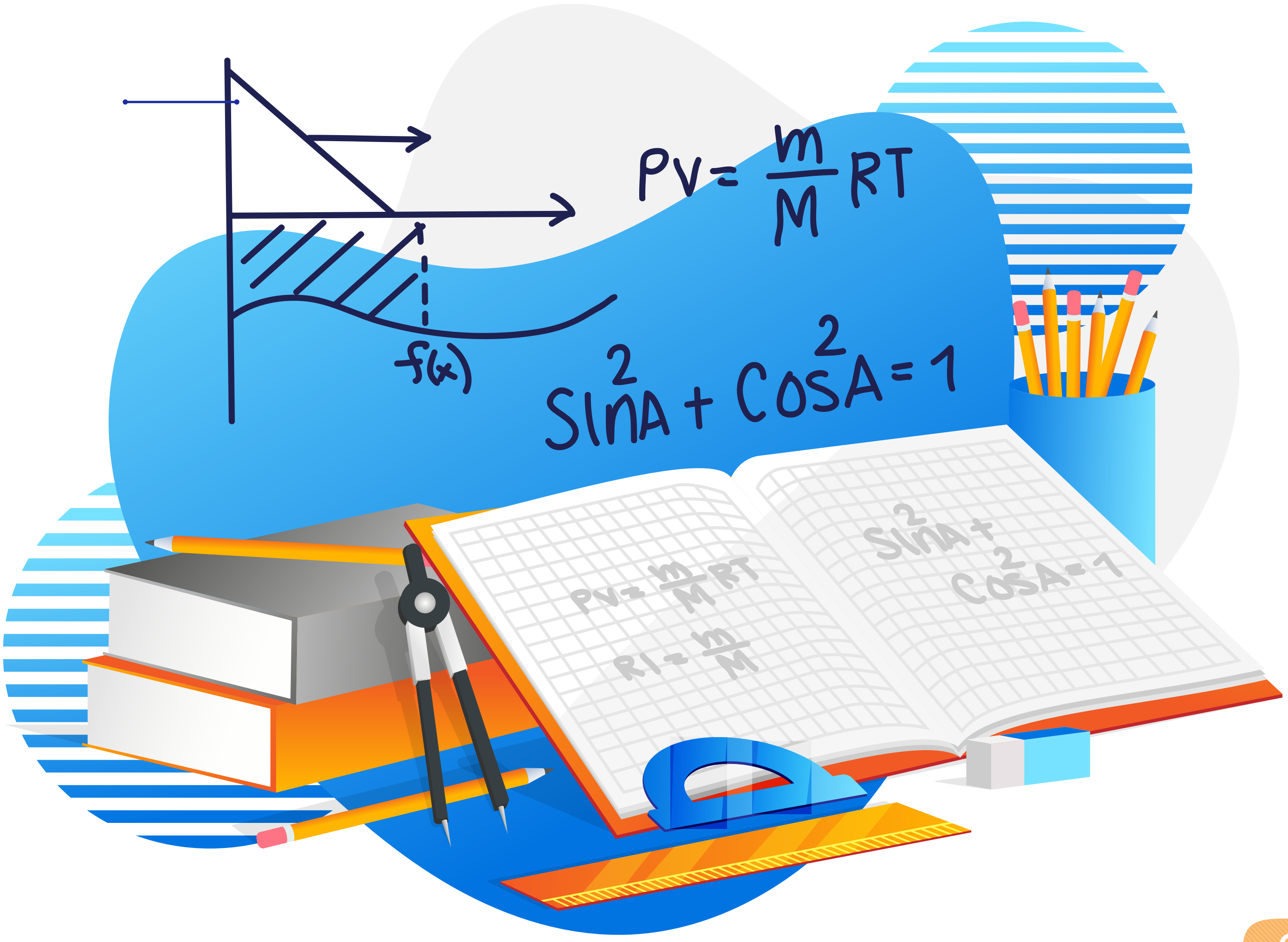
En esta unidad conocerás el movimiento rectilíneo uniforme y su relación con la primera ley de Newton, esto a través de la trigonometría, así como la representación y análisis de gráficas de movimiento y la ecuación de la recta, con la finalidad de relacionar las características del movimiento rectilíneo uniforme con su gráfica y la descomposición de un vector en sus componentes.

Te sugerimos navegar e interactuar con todos los elementos didácticos del presente contenido en extenso para tener una mayor comprensión de los temas abordados, así desarrollarás todas las competencias y aprendizajes esperados planteados para este módulo.

¡Mucho éxito!

Te has detenido a preguntarte...

¿Cómo una aplicación como Waze o Google Maps puede calcular el tiempo que tardarás en llegar a un lugar?, ¿qué diferencia hace llevar puesto el cinturón de seguridad al manejar? o ¿cómo puede un arquitecto saber las medidas que tendrá una gran construcción? Todo esto lo podrás responder cuando en esta unidad aprendas sobre las medidas en el espacio de los objetos, cómo se mueven y qué reglas siguen.



1. Trigonometría y sus aplicaciones

El uso de las medidas ha sido de vital importancia desde comienzos de la civilización. Por ejemplo, para construir una vivienda se requiere que las medidas de las paredes y los ángulos formados por las mismas sean precisas para poder realizar una construcción de mayor calidad. Cuando se comenzaron proyectos de mayor complejidad, como los templos, las casas de los gobernantes, las tumbas de éstos o las pirámides, donde participaba una gran cantidad de trabajadores, fue necesario crear unidades de medida comunes para que el trabajo pudiera llevarse a cabo sin mayores confusiones.

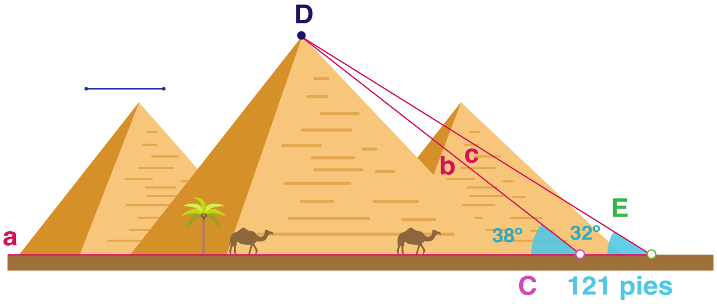


Figura 1. Establecimiento de la medida de los ángulos.

1.1. Medida de ángulos y razones trigonométricas de ciertos ángulos

La figura geométrica más simple y en la que podemos descomponer a los demás polígonos es el triángulo, por lo que comenzaremos el estudio de esta unidad con ellos. Un triángulo se puede definir con sus lados y sus ángulos, por lo que trataremos las relaciones entre estas medidas.

A la rama de las matemáticas que se encarga del estudio de los triángulos y sus relaciones, sus lados y sus ángulos se conocen como **trigonometría**.

1.1.1. Los ángulos

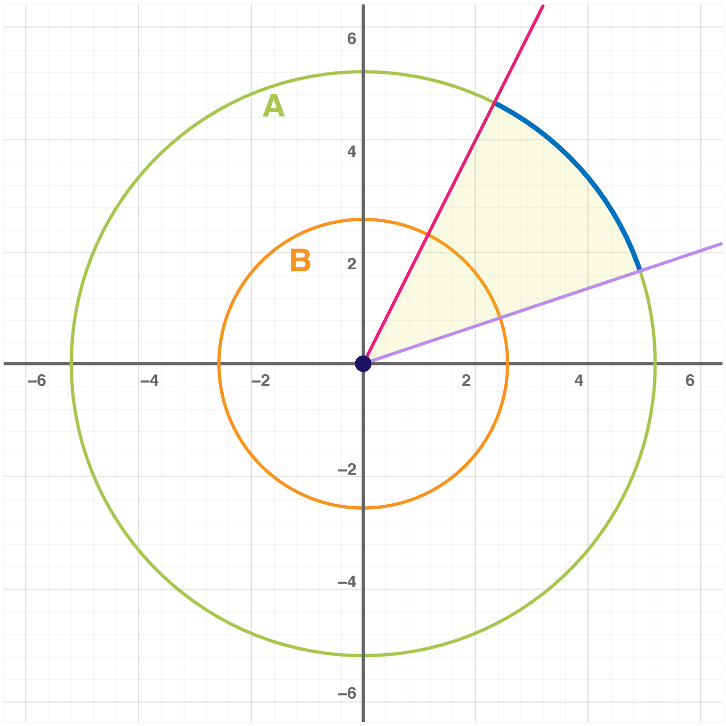


Figura 2. Correspondencia de un ángulo con la sección de un círculo en su centro.

Para comenzar este tema se debe definir primero qué es un **ángulo**. Si tenemos dos rectas que se cruzan, esta apertura formada se puede relacionar con una porción de un círculo si colocamos el centro de éste en la intersección de las rectas. Al punto de intersección de éstas se le conoce como **vértice**.

De acuerdo con la figura 2, se puede observar que la porción del círculo que corresponde a la apertura formada es independiente del tamaño del círculo.

Esto lo notaron en la Antigüedad en Mesopotamia donde los astrónomos y matemáticos crearon una unidad de medida llamada grado sexagesimal, que divide a la circunferencia en 360 partes iguales debido a que facilitaba los cálculos en su sistema numérico basado en el 60. En este sistema, a una apertura de la circunferencia correspondiente a $\frac{1}{360}$, lo llamamos 1 grado o 1°. Esto significa que una apertura de 45° corresponde a $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$ de una circunferencia completa.

Un instrumento que seguramente conoces y se emplea para medir ángulos es el semicírculo o transportador. Puede medir de 0° a 180°, ya que solamente es la mitad de una circunferencia como se puede observar en la figura 3.

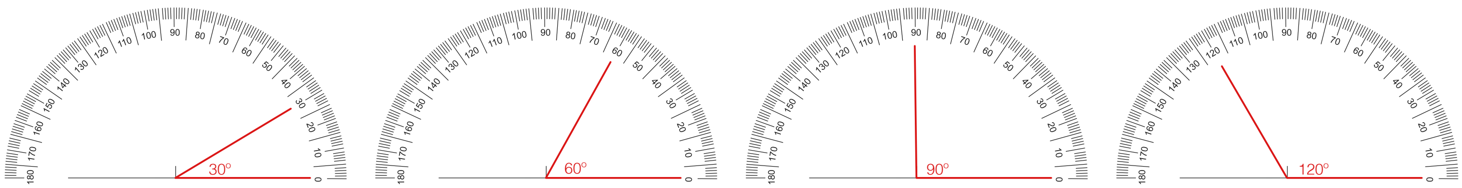


Figura 3. Uso del transportador para la medición de ángulos.

1.1.2. Radianes

Es la medida del ángulo tomado desde el centro de una circunferencia, obtenido al colocar un radio sobre ésta. Un radián es el ángulo de la apertura formado por colocar el radio de un círculo en su perímetro.

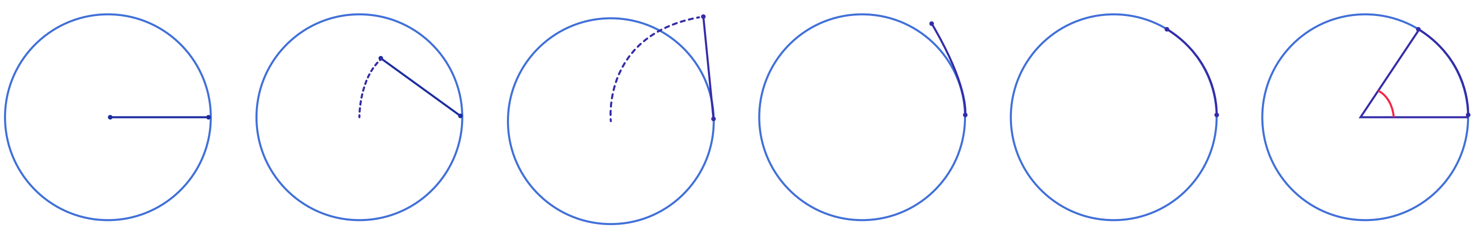


Figura 4. Representación de un radián.

1.1.3. Equivalencia entre grados y radianes

A partir de la definición de π, como el número de veces que cabe el **diámetro** (D) en la circunferencia (C), y dado que el diámetro mide el doble que el **radio** (r), podemos encontrar la relación entre una circunferencia y su radio (ver figura 5).

El **diámetro:** Es la línea recta que pasa por el centro y une dos puntos opuestos de un círculo.

El **radio**: Es cualquier segmento que une el centro a cualquier punto de una circunferencia

$$\pi = \frac{C}{D} = \frac{C}{2r} \Rightarrow C = 2\pi r$$

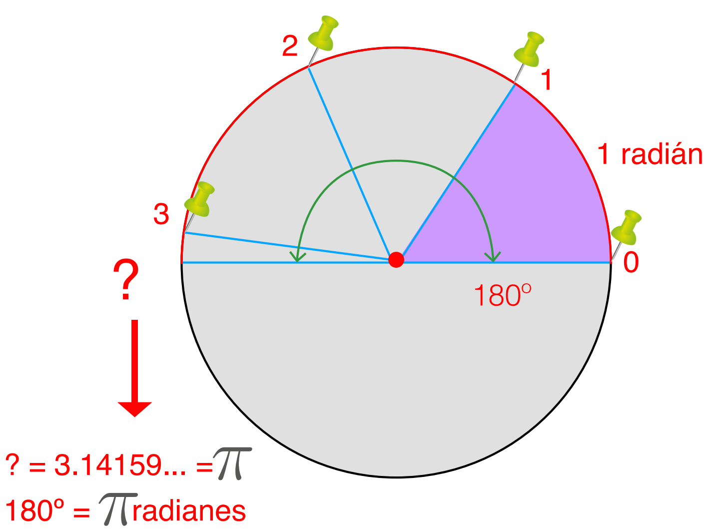


Figura 5. Representación de π.

Dado que un radián es el ángulo de la apertura formado por el arco formado al colocar el radio de un círculo en su perímetro (ver figura 4), de la relación anterior podemos concluir que una vuelta completa consta de 2 π radianes. Como una circunferencia tiene 360°, podemos entonces construir la siguiente relación:

$$2\pi\, radianes = 360^\circ$$
$$\Rightarrow \pi\, radianes = 180^\circ$$

Esta equivalencia se puede usar como factor de conversión.

Por ejemplo, si queremos convertir 120° a radianes, basta con multiplicar por la equivalencia π radianes = 180° en forma de fracción, de modo que en el denominador se encuentre el valor en las unidades que queremos cancelar y en el numerador las unidades en las que queremos convertir nuestro valor, como se muestra a continuación.

$$120\cancel{^\circ}\left(\frac{\pi\, radianes}{180\cancel{^\circ}}\right) = \frac{120\pi}{180} radianes = \tfrac{2}{3}\pi\, radianes \approx 2.094\, radianes$$

Si por el contrario queremos convertir radianes a grados, por ejemplo; π/6 radianes a grados, multiplicamos por el recíproco del caso anterior.

$$\frac{\cancel{\pi}}{6}\,\cancel{radianes}\left(\frac{180^\circ}{\cancel{\pi}\,\cancel{radianes}}\right) = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$$

Los ángulos son clasificados de acuerdo con el rango de sus medidas.

- Menores de 90° (π/2 radianes) son agudos.
- Igual a 90° son rectos.
- Más de 90°, pero menos de 180° (π radianes) son obtusos.
- Igual a 180° son llanos.
- Mayores de 180°, pero menores de 360° (2 π radianes) son entrantes.

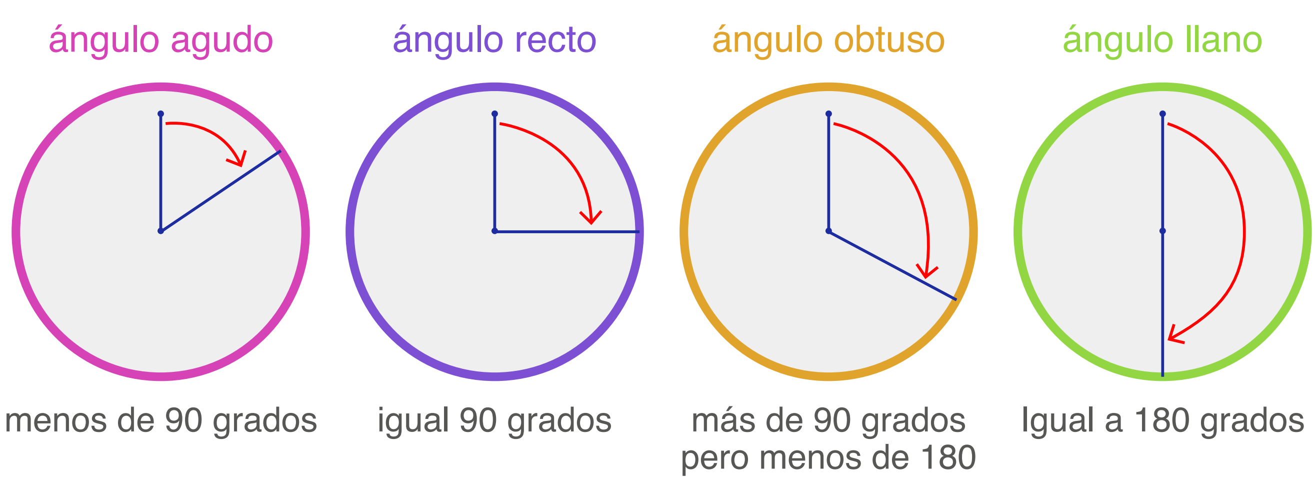


Figura 6. Clasificación de ángulos.

Si lo piensas, en tu vida cotidiana podrás identificar distintos objetos con las medidas de los ángulos que te mencionamos. Por ejemplo:

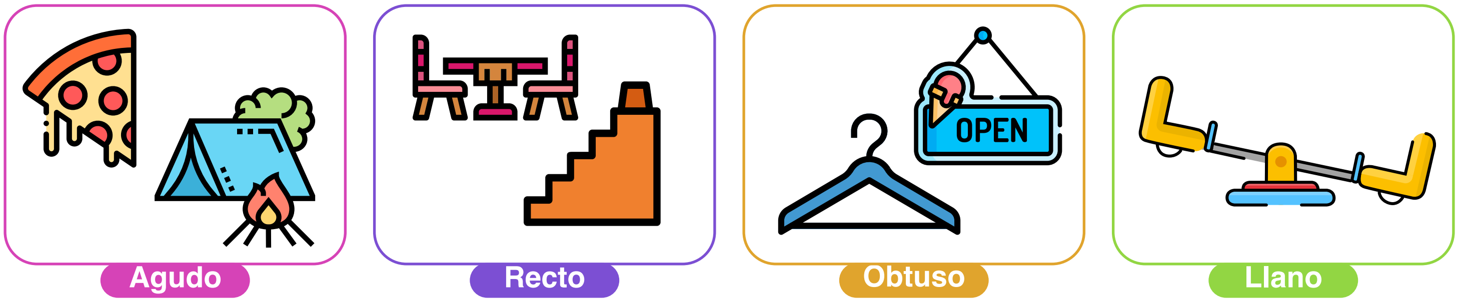


Figura 7. Ejemplos de objetos cotidianos y sus ángulos formados.

Para saber más...

Si quieres ver un ejemplo de cómo hacer conversiones de grados a radianes y viceversa te sugerimos consultar el siguiente link:

https://www.youtube.com/watch?v=S5xmJTmqQFA

1.1.4. Triángulos

El triángulo es la figura geométrica formada por tres segmentos rectos. Los vértices se suelen denotar con letras mayúsculas y los lados con letras minúsculas. Por ejemplo, podemos observar de la figura 8 que el lado **a** que está en negro está opuesto al ángulo **A**, y así con el resto de lados.

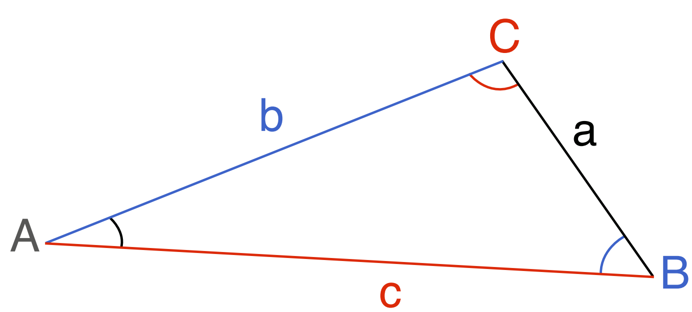


Figura 8. Notación de lados y ángulos.

Existe otro tipo de notación, en la que, para indicar un ángulo, éste irá precedido por el símbolo $\measuredangle$. Para indicar un lado, se escriben las letras de los vértices que se unen con una barra arriba. Por ejemplo, el ángulo **A** se denota como $\measuredangle$A y el lado **a** con $\overline{AB}$.

Todos los triángulos tienen las siguientes propiedades:

1. La suma de sus ángulos internos siempre es igual a 180° (A+B+C=180°).
2. La suma de dos de sus lados siempre será mayor que el tercer lado.

$$A + B > C$$
$$B + C > A$$
$$C + A > B$$

3. La diferencia de longitud de dos de sus lados siempre será menor que el tercer lado.

$$|A - B| < C$$
$$|C - B| < A$$
$$|C - A| < B$$

4. La suma de dos de sus ángulos internos es igual al valor del ángulo externo del vértice faltante. Como lo muestra la figura 9.

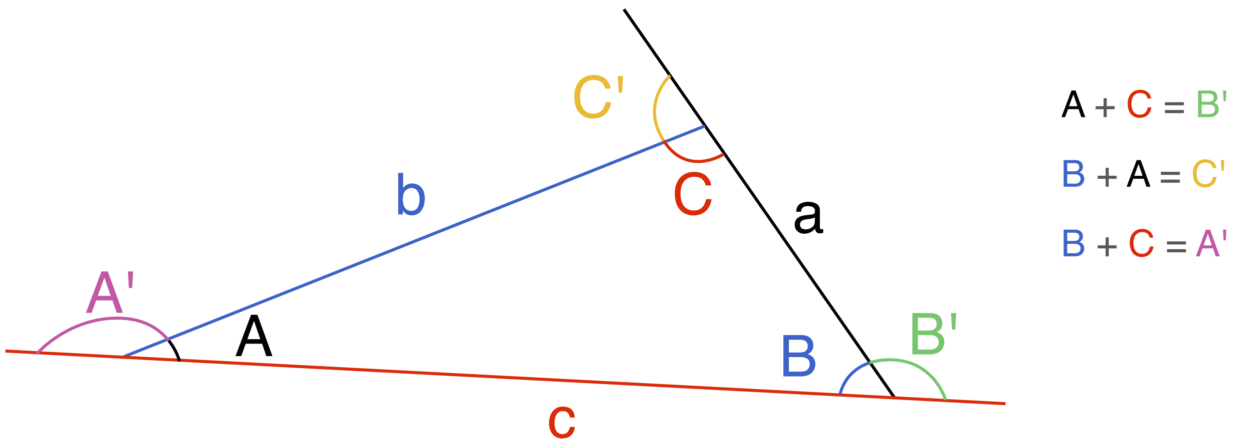
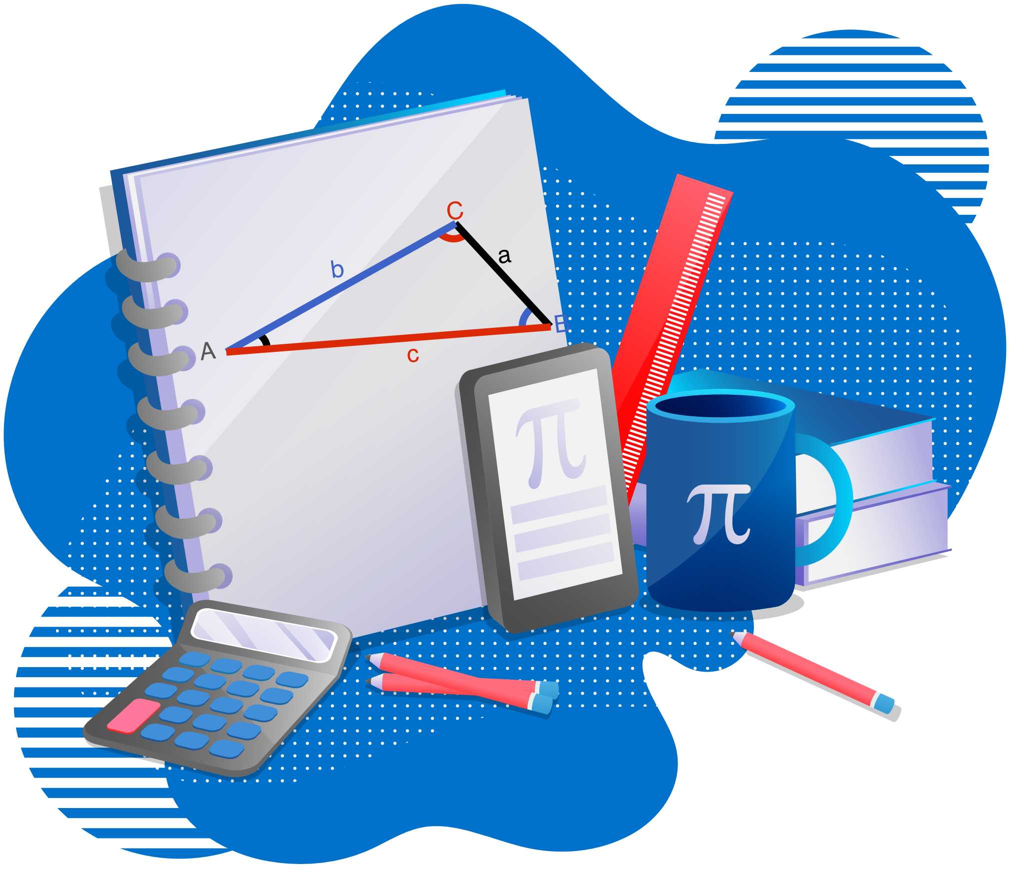


Figura 9. Relación entre ángulos externos e internos de un triángulo.

5. El lado más largo estará opuesto al ángulo más grande y el lado más chico al ángulo más pequeño.



1.1.5. Clasificación de los triángulos

Los triángulos se pueden clasificar por las medidas de sus lados y sus ángulos, para expresar lo anterior de manera más clara se muestran las tablas 1 y 2.

Tabla 1. Clasificación de los triángulos por la longitud de sus lados.

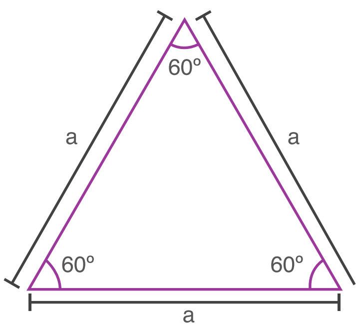
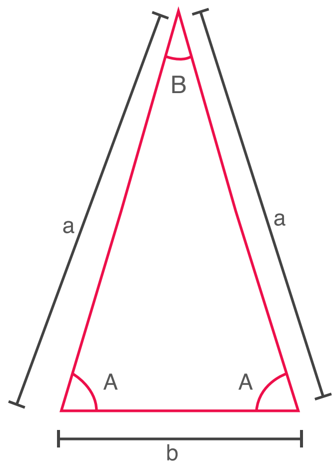
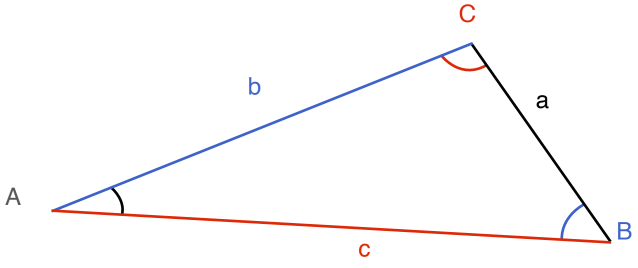
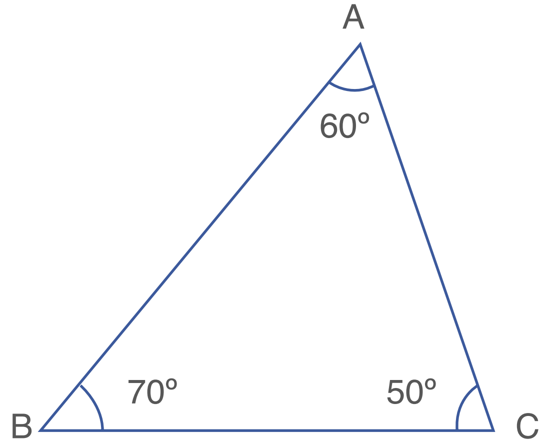
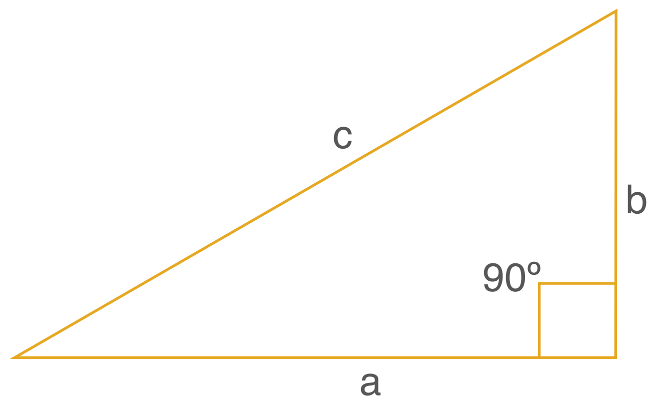
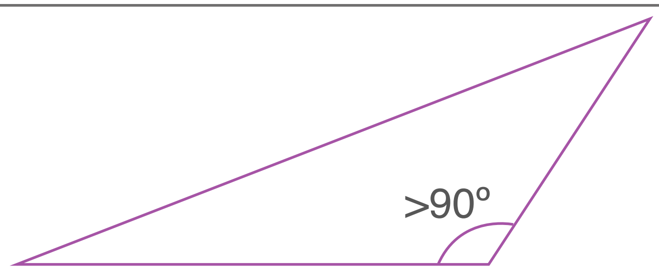
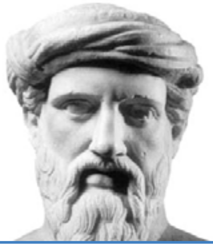
Nombre	Característica	Forma
Equilátero	Sus tres lados miden lo mismo.	
Isósceles	Tiene dos lados de medidas iguales y uno distinto.	
Escaleno	Todos sus lados miden distinto.	

Tabla 2. Clasificación de los triángulos por la longitud de sus ángulos.

Nombre	Característica	Forma
Acutángulo	Sus tres ángulos son agudos.	
Rectángulo	Tiene un ángulo recto.	
Obtusángulo	Tiene un ángulo obtuso.	

1.1.6. Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras es el más conocido de las matemáticas, éste nos indica la relación que existe entre los catetos de un triángulo rectángulo y su hipotenusa. Recordemos que los catetos son los lados que forman el triángulo rectángulo y la hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto. Por la propiedad 5 vista en el tema 1.1.4 “Triángulos”, la hipotenusa será siempre el lado de mayor tamaño, dado que está opuesta al ángulo más grande.



¿Sabías qué?
Pitágoras fue un filósofo y matemático griego considerado el primer matemático puro.

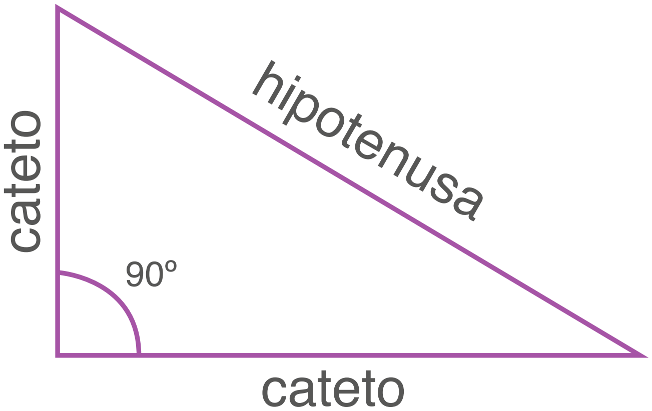


Figura 10. Representación de un triángulo con sus catetos e hipotenusa.

El teorema de Pitágoras dice:

> *“En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.”*

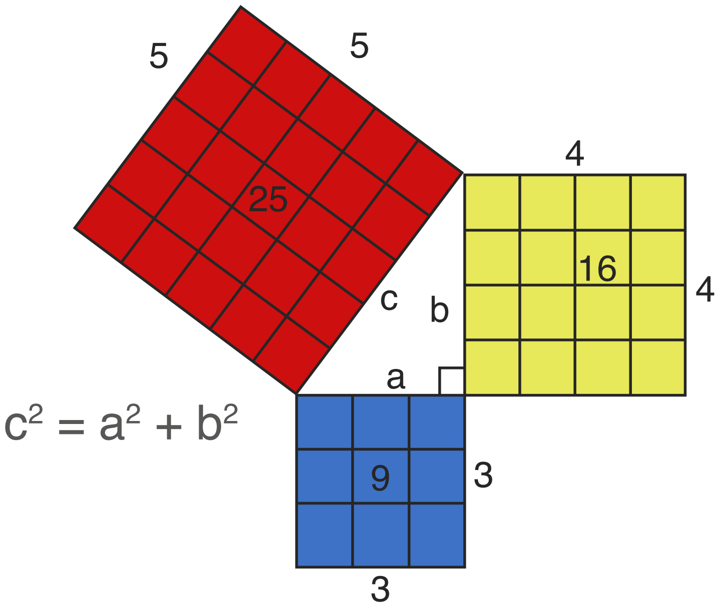


Figura 11. Comprobación del teorema de Pitágoras.

Esto se puede representar de la siguiente manera:

$$(hipotenusa)^2 = (cateto\,opuesto)^2 + (cateto\,adyacente)^2$$

La representación más común es indicar a los catetos como los lados ***a*** y ***b*** y a la hipotenusa como el lado ***c***. De esta manera el teorema queda de la siguiente forma:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

La utilidad de este teorema es que al contar con dos de los lados en un triángulo rectángulo podemos plantear una ecuación que nos permita encontrar el faltante.

Ejemplo 1.1

Se quiere poner una tirolesa en un parque de diversiones. Los puntos tienen una diferencia de 9 metros de altura y la distancia entre los dos puntos a la misma altura es de 40 metros. ¿De cuánto tiene que ser la longitud mínima del cable?

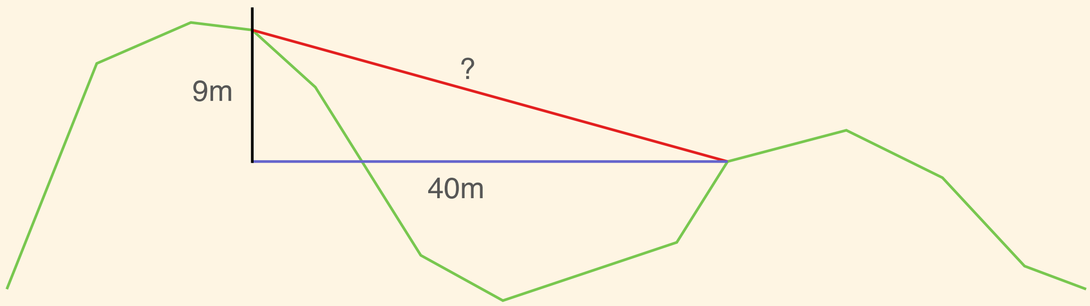


Figura 12. Representación de la tirolesa.

Solución

De la imagen podemos identificar los siguientes valores.

$$c = ?$$
$$a = 9m$$
$$b = 40m$$

El valor desconocido es la hipotenusa **c**, que despejamos con el teorema de Pitágoras y tenemos:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Sustituimos los valores y obtenemos:

$$c = \sqrt{(9m)^2 + (40m^2)} = \sqrt{81m^2 + 1600m^2} = \sqrt{1681m^2} = 41m$$

Por lo tanto, el cable debe tener al menos 41 metros de longitud.

1.2. Razones entre magnitudes para resolver situaciones contextuales

Vamos a centrarnos en el triángulo rectángulo. Si hacemos una medida de la proporción entre sus catetos, nos encontraremos con que la proporción es siempre la misma. En la Antigüedad se dieron cuenta de lo mismo y se crearon tablas de la proporción para cada triángulo en función de la medida de sus ángulos.

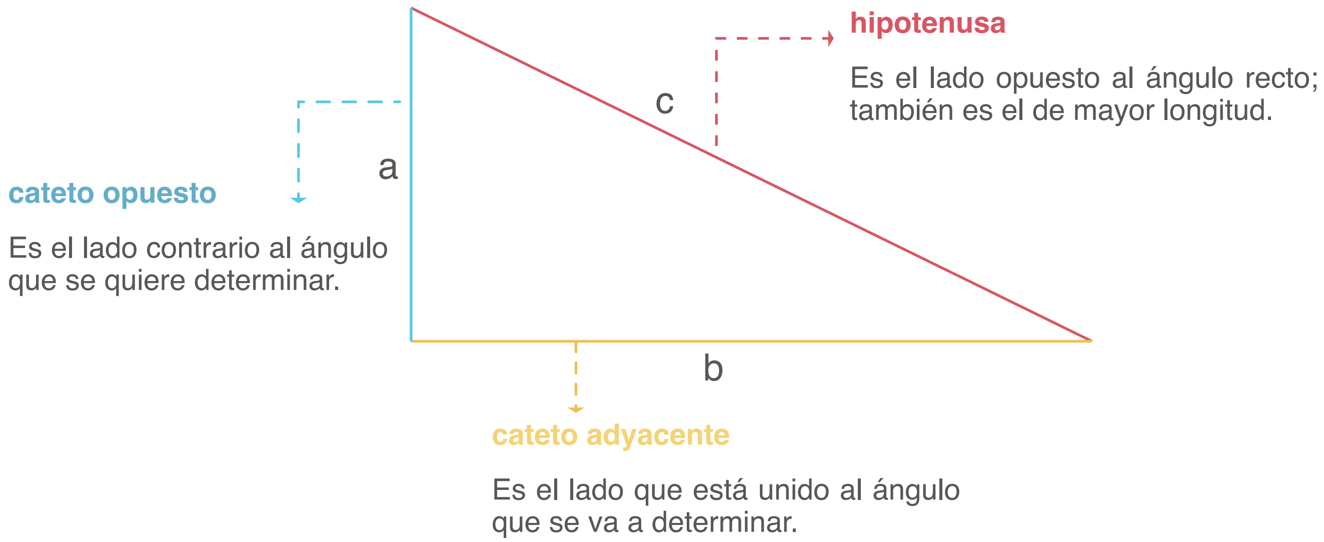


Figura 13. Representación del triángulo rectángulo.

Definiendo los nombres de los lados del triángulo se crearon las siguientes relaciones.

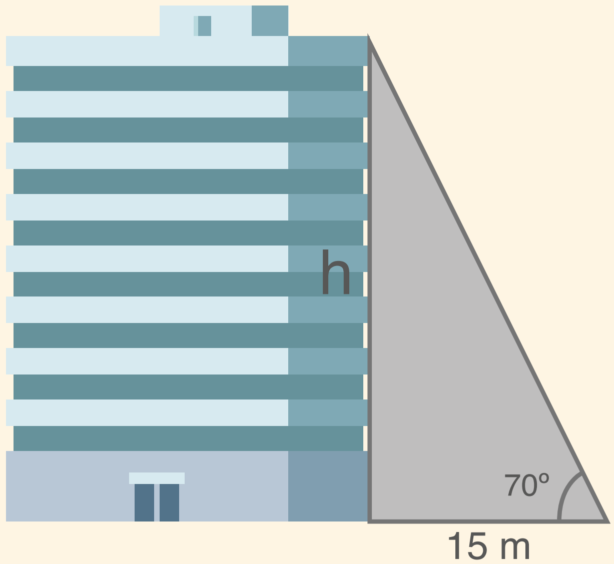
Tabla 3. Identidades trigonométricas.

Función	Definición	Razón	Abreviación
seno	$= \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	$\dfrac{a}{c}$	sen(a)
coseno	$= \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	$\dfrac{b}{c}$	cos (a)
tangente	$= \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$	$\dfrac{a}{b}$	tan (a)
cotangente (recíproco de la tangente)	$= \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$	$\dfrac{b}{a}$	cot (a)
secante (recíproco del coseno)	$= \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$	$\dfrac{c}{b}$	sec (a)
(recíproco del seno)	$= \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$	$\dfrac{c}{a}$	csc (a)

Actualmente, en lugar de recurrir a estas tablas podemos auxiliarnos con la calculadora para utilizar estos valores. La utilidad de tener dichas relaciones es que con la información del valor de un ángulo que no sea el recto en un ángulo rectángulo, podemos obtener el valor de cualquier otro.

Ejemplo 1.2

Un edificio proyecta una sombra, al usar una cinta métrica y medir, resulta que su sombra es de 15 metros y forma un ángulo de 70° con el suelo como muestra la figura siguiente. ¿Cuál es su altura?



Solución

Primero tenemos que identificar la información que se nos está dando. El ejercicio 1.2 nos indica el valor del ángulo y lo que sería el **cateto adyacente**. Queremos encontrar el valor de la altura que es el **cateto opuesto**.

Para ello vamos a determinar cuál de las funciones trigonométricas maneja una relación entre los catetos. Observamos la tabla 3 e identificamos a la tangente.

$$\tan\theta = \frac{cateto\,opuesto}{cateto\,adyacente}$$

Despejamos el valor que queremos obtener que es el cateto opuesto.

$$cateto\,opuesto = \tan\theta \cdot (cateto\,adyacente)$$

Sustituimos los valores y tenemos:

$$cateto\,opuesto = \tan(70^\circ)\cdot(15m)$$
$$cateto\,opuesto = (2.747)(15m) = 41.21\,m$$

Por lo tanto, la altura del edificio es de 41.21 metros.

1.3. Círculo trigonométrico, relaciones e identidades trigonométricas

Para entender cómo se comportan las funciones trigonométricas vamos a partir de un círculo de radio igual a 1 y para formar un triángulo rectángulo, usando como catetos su altura en **y** y su longitud en **x**, como aparece en la figura 14.

Dado que la función seno es el valor de cateto opuesto entre la hipotenusa, pero la hipotenusa siempre va a valer 1, porque siempre va a ser el valor del radio, entonces, el valor del seno para cualquier ángulo será simplemente el valor del cateto adyacente o coordenada conforme el círculo va girando. De igual manera, el valor del coseno será el valor del cateto adyacente o coordenada x conforme el ángulo va girando (ver figura 15).

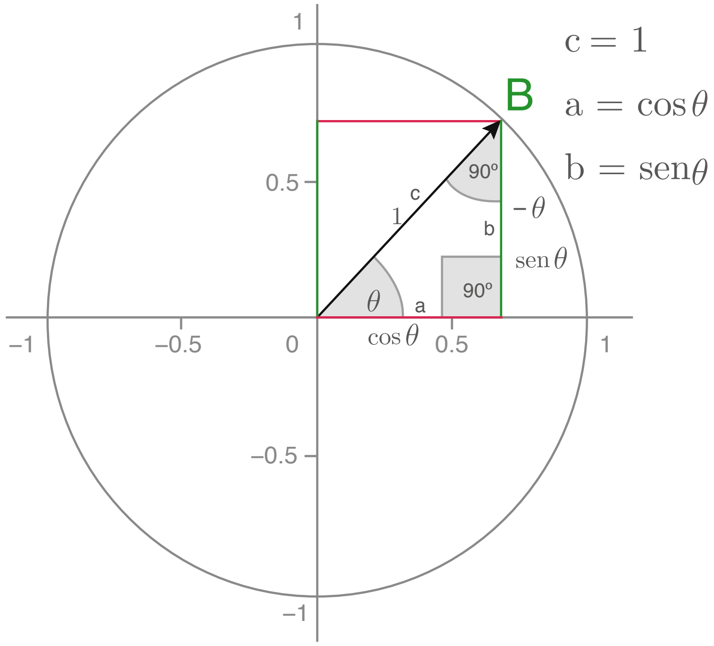


Figura 14. Círculo unitario.

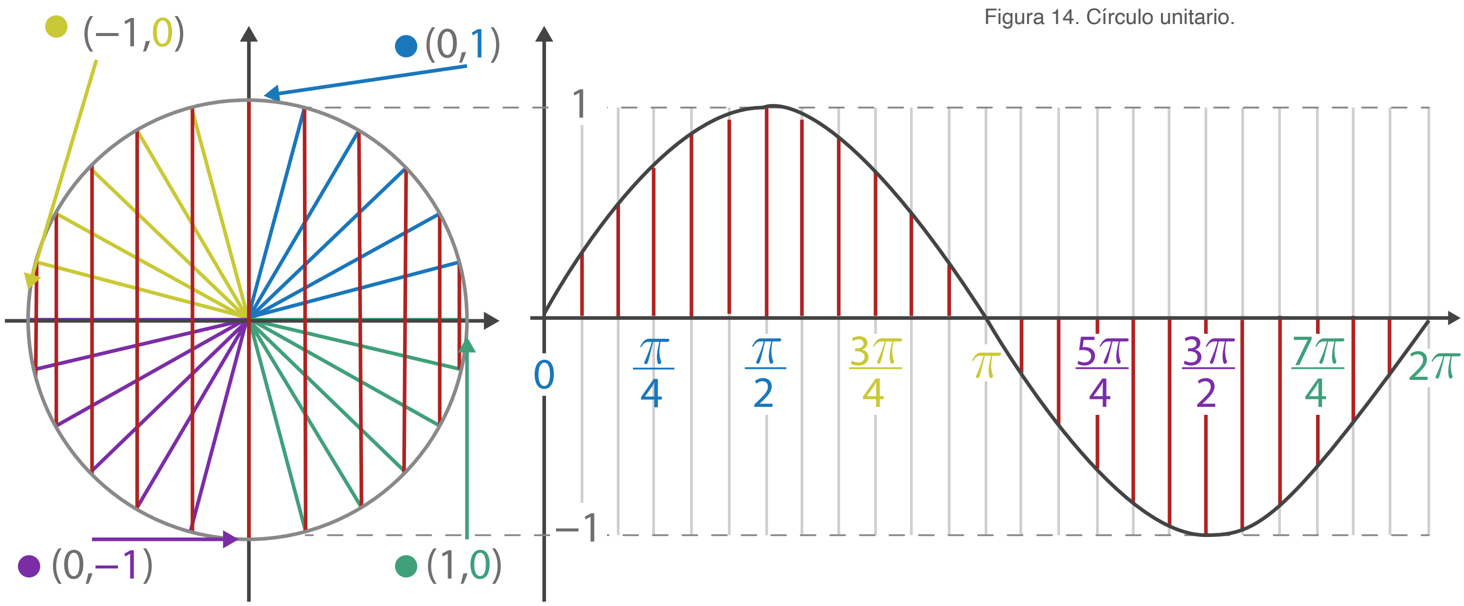


Figura 15. Representación de la función seno.

Para saber más…

Te sugerimos consultar la siguiente liga para comprender mejor el seno y el coseno:

https://www.youtube.com/watch?v=XH3htlWU9N4&t=34s

Para poder obtener los valores de las funciones trigonométricas en algunos ángulos, te sugerimos revisar la siguiente liga:

https://www.youtube.com/watch?v=rQSuqLrhn7E

1.4. Historia y actualidad de la aplicación de las razones trigonométricas fundamentales

Las funciones trigonométricas se han usado desde la Antigüedad, Eratóstenes de Cirene,[1] por ejemplo, usó razones trigonométricas para calcular la circunferencia de la Tierra (figura 16).

También utilizó herramientas como el astrolabio, muy usado para la navegación, que basaba sus principios en razones trigonométricas (figura 17).

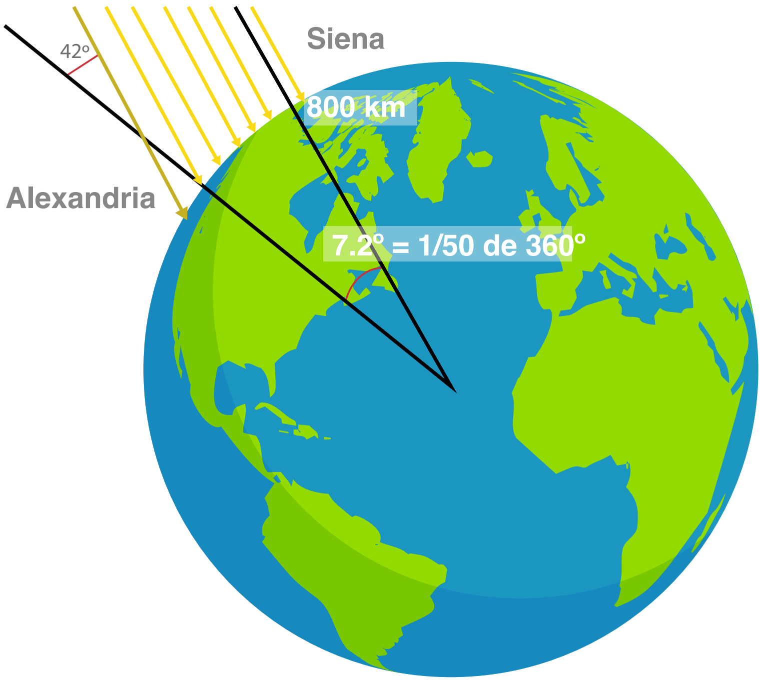


Figura 16. Cálculo de Eratóstenes.

Figura 17. Astrolabio para la navegación.

Actualmente el uso de razones trigonométricas sigue siendo indispensable en múltiples áreas de la actividad humana como la construcción, la navegación marítima y aérea, así como en la geolocalización del sistema GPS o los radares.

Tip de aprendizaje

Te sugerimos practicar razones trigonométricas en triángulos rectángulos en la siguiente liga:

https://es.khanacademy.org/math/geometry/hs-geo-trig/hs-geo-trig-ratios-intro/e/trigonometry_1

[1] Cirene, 276 a. C. 1-Alejandría, 194 a. C.

1.5. La trigonometría como aplicación en la medición espacial

La aplicación de la trigonometría en la actualidad tiene múltiples aplicaciones, por ejemplo, podemos calcular distancias muy grandes en el universo y aquí en la Tierra. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3

Se tiene que construir una rampa para personas con discapacidad motriz. Los estándares oficiales establecen una pendiente máxima para las rampas accesibles del 6%, donde:

$$Pendiente\,en\,porcentaje = \frac{h}{d} \times 100\%$$

En donde *h* es la altura y *d* la longitud de la base. ¿A qué ángulo se debe construir una rampa que tiene que sortear una altura de 1.5 metros?

Solución

De la fórmula tenemos que:

$$Pendiente\,en\,porcentaje = \frac{h}{d} \times 100\%$$

$$6\% = \frac{h}{d} \times 100\%$$

$$\frac{h}{d} = \frac{6\cancel{\%}}{100\cancel{\%}} = 0.06$$

Por otra parte, observamos que $\frac{h}{d}$ es equivalente a la tangente del ángulo.

$$\tan\theta = \frac{c.o.}{c.a.} = \frac{h}{d} = 0.06$$

Por tanto, despejamos el ángulo usando la función tangente inversa de ambos lados.

$$\tan\theta = 0.06$$
$$\cancel{\tan^{-1}}(\cancel{\tan}\theta) = \tan^{-1}(0.06)$$
$$\theta = 3.433°$$

Entonces, el ángulo no debe ser mayor a 3.433°.

2. El plano

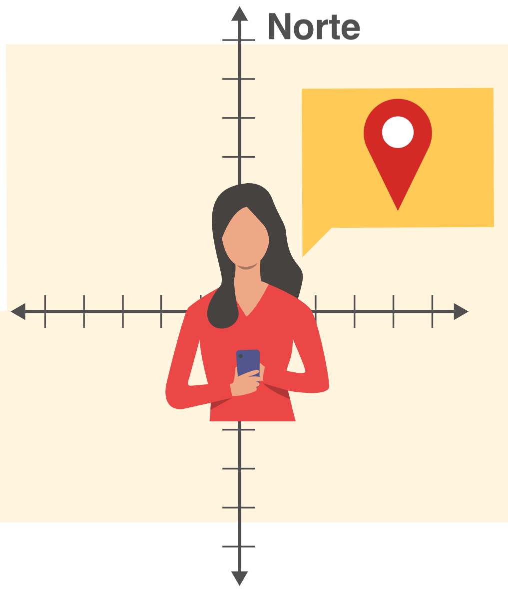
2.1. Elaboración de mapas y establecimiento de rutas en el plano

Seguramente, en más de una ocasión, alguna persona te ha pedido ayuda para llegar a algún lugar específico de tu localidad, por ejemplo, a la plaza principal; y quizá le has dado indicaciones para lograrlo. En el momento en el que le dices cómo llegar, utilizas palabras, gesticulas, haces señas con las manos o realizas un dibujo. En cualquiera de los casos, mencionas o escribes la distancia que debe recorrer en unidades como metros, calles o cuadras y el sentido en el que debe desplazarse (hacia delante, hacia atrás, a la derecha o a la izquierda).

En esta actividad cotidiana estás utilizando un **sistema de referencia**. Los sistemas de referencia son de utilidad para ubicar un punto o un objeto de interés, al tomar como base un lugar llamado origen. A partir de lo anterior, se construye un sistema de referencia basado en la ubicación de la plaza principal. Para lograrlo se necesita establecer:

Un **sistema de referencia** es un conjunto de coordenadas espacio-tiempo que se requiere para poder determinar la posición de un punto en el espacio.

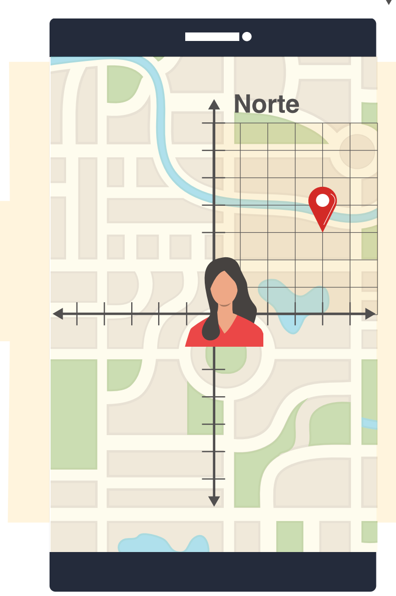
- **Origen** es el lugar donde te encuentras al proporcionar las instrucciones para llegar a la plaza principal. Para representar el origen, se empleará la siguiente imagen:



- **Ejes**, se necesitan dos para ubicar la plaza principal: el que representa la dirección norte y el de la dirección este. Los ejes se nombran de acuerdo con el contexto en el que se apliquen, por ejemplo: norte y este o x y y. Estos ejes se dividen en unidades como cuadras o calles, metros, kilómetros, entre otras.

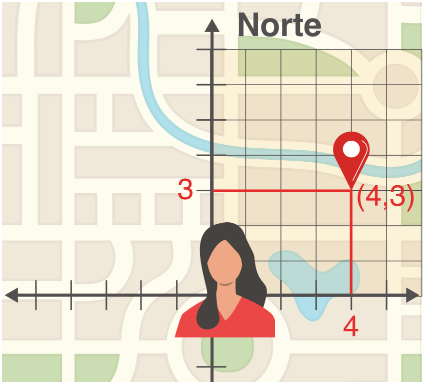
- **Un punto u objeto de interés**, en este caso la plaza principal.

- Finalmente, se ubica el **punto de interés en el sistema.**



De acuerdo con el sistema de referencia elaborado, la plaza principal se encuentra en la posición 4 este, 3 norte. Por convención se inicia mencionando el eje horizontal y luego el vertical. La posición se puede representar también como (4,3).

Como te habrás dado cuenta, sin un sistema de referencia no es posible ubicar la posición exacta de un punto o lugar. Los sistemas de referencia tienen múltiples aplicaciones, por ejemplo, en los dibujos en dos (2D) y tres dimensiones (3D) y en la cartografía.



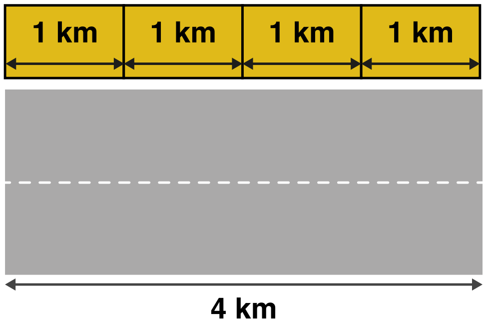
2.2. Magnitudes, unidades y variables en un sistema físico

Imagina que estás en el año 3,000 a.C. y eres el encargado de realizar una obra para el gobernante en turno. Requieres de adobes para comenzar a formar las paredes, lo más conveniente es que todos los tabiques sean del mismo tamaño para facilitar su uso en la construcción. ¿Cómo te asegurarías de que los fabricantes de los adobes los elaboren del mismo tamaño?

Como probablemente lo pensaste, se requeriría de brindar a los fabricantes alguna pieza de un tamaño fijo para que puedan basarse en ella. Y es justo desde los inicios de la civilización que se comenzaron a usar estos patrones de medida en algún objeto o fenómeno, ya sea para que se pudieran repetir o para que se compararan con otros. La palabra **medir** proviene del latín *metior*, que significa ´comparar una cantidad´, que suele ser un patrón fijo al que llamamos **unidad de medida**. Aquello que podemos medir con una unidad de medida se conoce en la física como **magnitud.**

Magnitud es todo aquello que se puede medir, como la longitud, la superficie, la temperatura o el peso. Medir es determinar el valor de una magnitud, como calcular determinar el peso, el volumen o la longitud de algo, medir el ancho de una calle.

A modo de ejemplo, la longitud es la magnitud que se mide en metros o en pies. Una magnitud puede tener varias unidades de medida y se usará la más conveniente de acuerdo con lo que se requiera. Por ejemplo, para medir la distancia entre dos ciudades es mucho más práctico hacerlo en kilómetros que en centímetros, de la misma manera que es mejor medir la masa de una moneda en gramos en lugar de en toneladas.



Conforme las civilizaciones se fueron desarrollando, se fueron estableciendo medidas de control para estandarizar las unidades de medida, no obstante, estas unidades variaban de región a región. Durante la Revolución francesa, en su esfuerzo por cambiar absolutamente todas las instituciones de la vieja sociedad, siguiendo modelos racionales, se introdujo por decreto en el año 1800 el sistema métrico decimal, con el que se pretendía buscar un sistema de unidades único para todo el mundo y así facilitar el intercambio científico, cultural, comercial, etcétera. Este sistema fue evolucionando poco a poco hasta que, en 1960, en la 11ª Conferencia General de Pesas y Medidas, se creó lo que se conoce como el **Sistema Internacional de Unidades** (SI).

Para saber más...

Si quieres conocer más sobre este tratado entra en la siguiente liga:

https://www.fujisansurvey.com/wp-content/uploads/2012/04/Sistema1.pdf

2.2.1. Magnitudes fundamentales y derivadas

El SI consta de siete unidades básicas fundamentales a las que representan magnitudes físicas. A partir de esto se determina el resto de unidades a las que se les llama derivada. Las unidades fundamentales las podemos observar en la tabla 4.

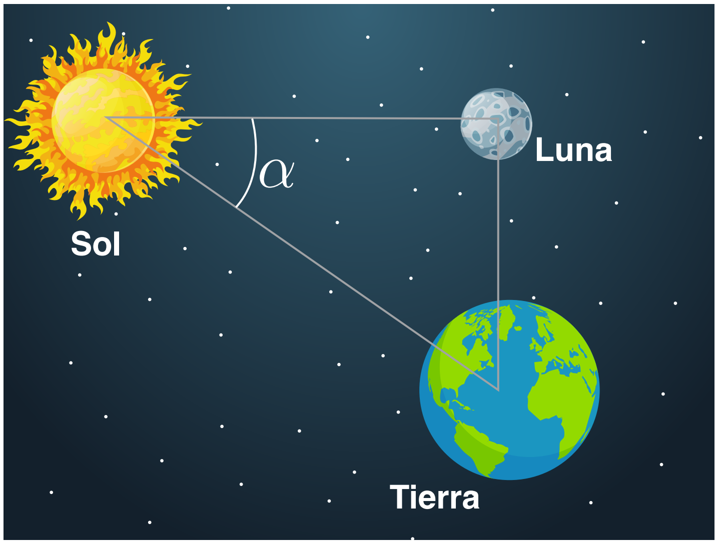
Entre las unidades derivadas podemos encontrar al metro cúbico (m^3, volumen) o kilogramo sobre metro cúbico (kg/m^3, densidad). Se puede observar que estas unidades son una combinación de unidades fundamentales, como el metro y el kilogramo.

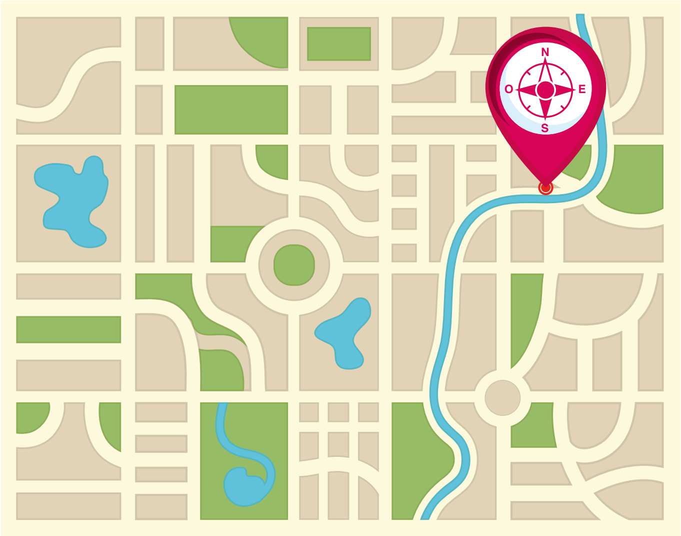
Tabla 4. Unidades fundamentales del SI.

Magnitud física básica (símbolos para valores)	Unidad básica (símbolo)
longitud (l, x, r, etc.)	metro (m)
masa (m)	kilogramo (kg)
tiempo (t)	segundo (s)
corriente eléctrica (I,i)	amperio (A)
temperatura (T)	kelvin (K)
cantidad de sustancia (n)	mol (mol)
intensidad luminosa (Iv)	candela (cd)

2.2.2. Prefijos en unidades de medidas

Observa las siguientes imágenes y reflexiona sobre qué tan grandes o pequeñas son las distancias que están representadas.





Si se quisiera medir la distancia representada en cada imagen, utilizando la unidad de metros, en algunos casos las cantidades serían muy grandes como la distancia media entre la Tierra y la Luna (384,400,000 metros) o muy pequeñas como el largo del cuerpo de una hormiga obrera (0.0021 metros, aproximadamente).

Un ***prefijo*** es una partícula lingüística de una palabra que se agrega al inicio de otra y la modifica.

Para escribir de manera simplificada cantidades muy grandes o muy pequeñas en números enteros no muy grandes, se utilizan los **prefijos**.

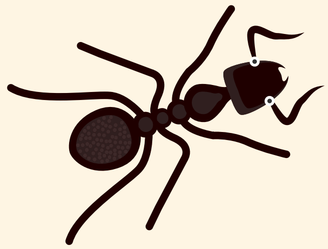
Los prefijos para unidades utilizadas en la ciencia se representan en la siguiente tabla.

Tabla 5. Prefijos y su equivalencia en unidades.

Prefijo	Símbolo	Valor	Equivalencia en unidades
exa	E	1×10^{18}	trillón
peta	P	1×10^{15}	mil billones
tera	T	1×10^{12}	billón
giga	G	1×10^{9}	mi billones
mega	M	1×10^{6}	millón
kilo	K	1×10^{3}	mil
hecto	H	1×10^{2}	cien
deca	Da	1×10	diez
unidad	1	1	uno
deci	D	1×10^{-1}	décima
centi	C	1×10^{-2}	centésima
mili	m	1×10^{-3}	milésima
micro	µ	1×10^{-6}	millonésima
nano	n	1×10^{-9}	mil millonésimas
pico	P	1×10^{-12}	billonésima
femto	F	1×10^{-15}	mil billonésimas
atto	A	1×10^{-18}	trillonésima

A continuación, veremos algunos ejemplos que te ayudarán a comprender mejor los prefijos.

Ejemplo 2.1



Para expresar en milímetros el largo del cuerpo de una hormiga obrera (0.0021 metros, aproximadamente), se realiza lo siguiente:

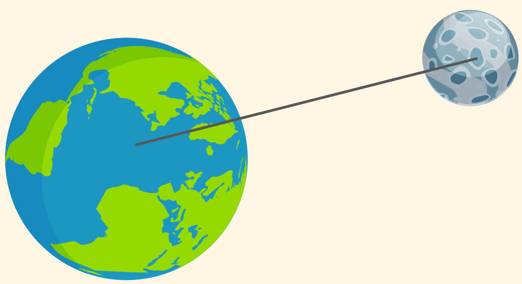
Solución

1. Identificar el valor del prefijo mili = 1×10^{-3}
2. Multiplicar por la equivalencia entre milímetros y metros. En el numerador se coloca 1 milímetro y en el denominador su valor en metros para que se cancele la unidad de medida metros:

$$0.0021\cancel{metros}\left(\frac{1\,milimetro}{1x10^{-3}\cancel{metros}}\right) = 2.1\,milimetros$$

El largo del cuerpo de una hormiga obrera es de aproximadamente 2.1 milímetros.

Ejemplo 2.2



Para expresar en kilómetros la distancia media entre la Tierra y la Luna (384,400,000 metros), se realiza lo siguiente:

Solución

1. Identificar el valor del prefijo kilo = 1×10^{-3}
2. Multiplicar por la equivalencia entre kilómetros y metros, en el numerador se coloca 1 kilómetro y en el denominador su valor en metros para que se cancele la unidad de medida metros.

$$384\,400\,000\cancel{metros}\left(\frac{1\,kilómetro}{1x10^{3}\cancel{metros}}\right) = 384\,400\,kilómetros$$

La distancia media entre la Tierra y la Luna es de 384 400 kilómetros.

A continuación, aparecerán ejemplos de longitud expresada de diferentes formas.

2.2.3. Sistema inglés

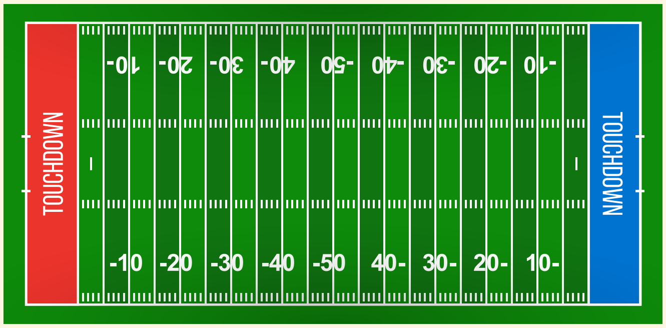
Para medir la distancia en México y en la mayor parte del mundo se emplea de forma común metros, centímetros, milímetros y kilómetros. Sin embargo, en EE.UU., se sigue usando el sistema inglés. Debido a la importancia económica a nivel mundial de EE.UU., es importante conocer este sistema. Para la longitud, las unidades son:

Tabla 6. Unidades fundamentales de longitud.

Unidades fundamentales de longitud	
Unidades	Equivalencia
1 pie	0.3048 metros
1 yarda	0.914 metros
1 milla	1.61 kilómetros
1 metro	0.3937 pulgadas; 3.281 pies; 1.094 yardas; 100 centímetros; 1,000 milímetros

Ejemplo 2.3

Un campo de futbol americano tiene una longitud de 120 yardas que incluye las zonas de anotación. ¿A cuántos metros equivale esta longitud?



Solución

Las yardas son unidades del sistema inglés y los metros son unidades del sistema internacional. Para realizar la conversión se debe conocer la equivalencia entre yardas y metros. Al consultar la tabla proporcionada se identifica que 1 yarda = 0.914 metros.

Para calcular la longitud en metros del campo que mide 100 yardas, se realizarán las siguientes operaciones.

$$120\,\cancel{yardas}\left(\frac{0.914\,metros}{1\,\cancel{yarda}}\right)=109.68\,metros$$

El largo de un campo de futbol americano mide 109.68 metros.

2.3. Magnitudes escalares y vectoriales

Las magnitudes físicas se pueden clasificar en dos tipos: escalares y vectoriales.

Las escalares son aquellas magnitudes que se pueden definir simplemente con un valor numérico de una unidad. Por ejemplo, la masa se define al indicar la cantidad de kilogramos contenidos en la misma o el tiempo con los segundos, minutos, horas, etc. que transcurrieron.

Sin embargo, en las cantidades vectoriales esta información no es suficiente para entender la medida por completo. Por ejemplo, si se dice que se aplica una fuerza sobre una pelota en el piso, es necesario saber la dirección de la misma, pues el efecto no será el mismo si esa fuerza se aplica por la derecha o por la izquierda.

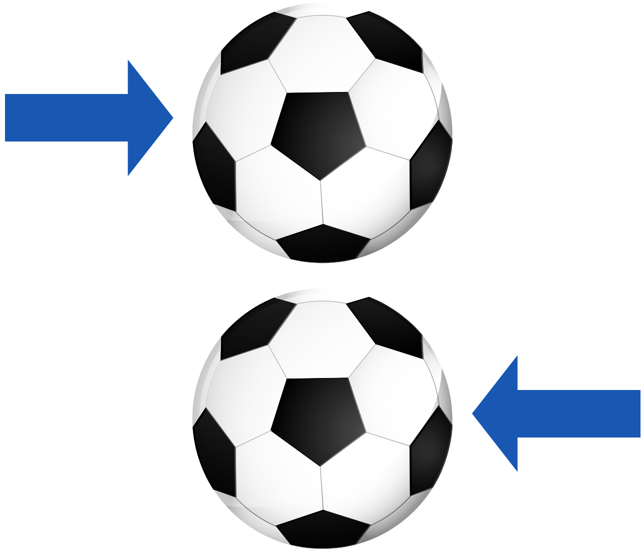


Figura 18. Dirección de una fuerza.

Lo mismo ocurre con una corriente eléctrica. Es importante conocer no sólo su intensidad, sino su dirección, pues por ejemplo un foco led sólo prende cuando la dirección de la corriente que se la aplica es la correcta. Sin embargo, en una magnitud escalar como la temperatura o la masa, no tiene sentido hablar de una dirección.

En resumen, las magnitudes escalares solamente se componen de magnitud y las vectoriales tienen, además de magnitud, dirección.

Tabla 7. Magnitudes escalares y vectoriales.

Tipo	Magnitud	Dirección	Ejemplos
Escalares	Sí	No	Masa, temperatura, volumen, carga eléctrica, densidad.
Vectoriales	Sí	Sí	Fuerza, velocidad, corriente eléctrica, campo eléctrico, peso.

2.4. Distancia y desplazamiento

Existen magnitudes que se pueden describir como escalares o como vectoriales, dependiendo del tratamiento que se les dé. Un ejemplo es la distancia y el desplazamiento.

Ejemplo 2.4

Uno de los ejercicios básicos para mejorar la escritura a mano es el que se muestra en la siguiente figura:

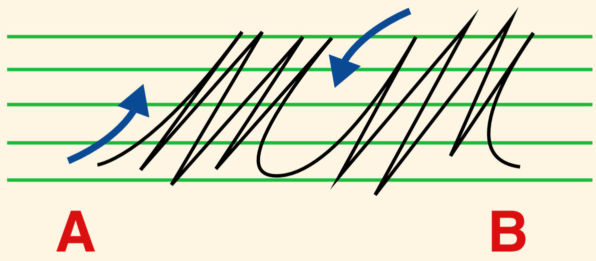


Figura 19. Ejemplo de ejercicio para mejorar la escritura a mano.

Solución

Si se quiere conocer la distancia que recorrió el lápiz, se tiene que medir la longitud de la trayectoria que siguió desde el punto A hasta el punto B, pero si se desea saber el desplazamiento del lápiz, se tendrá que medir la distancia en línea recta que los separa, desde el punto A hasta el punto B.

Ejemplo 2.5

Otro ejemplo es el circuito del Autódromo Hermanos Rodríguez de la Ciudad de México que tiene una longitud de 4.304 km.

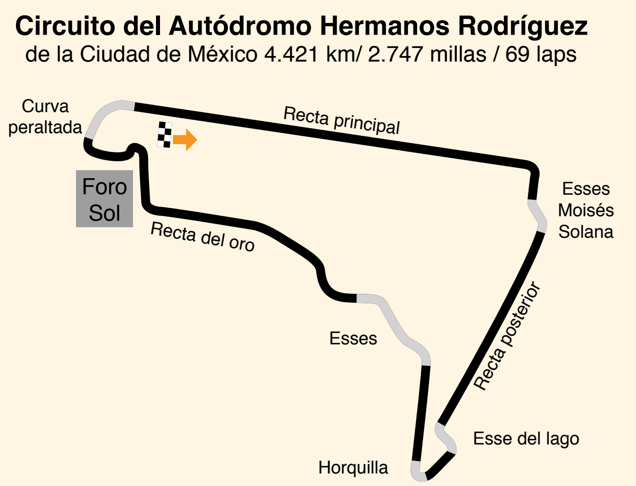


Figura 20. Imagen del circuito del Autódromo Hermanos Rodríguez.

Solución

Si un automóvil recorre una vez el circuito (da una vuelta), la distancia será igual a 4.304 km y el desplazamiento será de 0 km porque el automóvil terminará el recorrido en el mismo punto que inició.

A partir de estos ejemplos, se puede decir que la distancia es la longitud de la trayectoria recorrida por un cuerpo durante cierto intervalo de tiempo. El desplazamiento es igual a la posición final menos la posición inicial. De acuerdo con el Sistema Internacional (SI), la unidad de medida de la distancia y el desplazamiento (m).

2.4.1. Cálculo de la distancia y el desplazamiento en sistemas de referencia de una dimensión

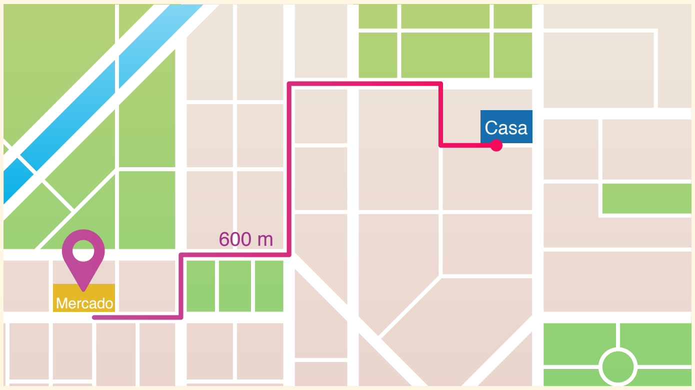
Veamos un caso de la distancia y del desplazamiento para ejemplificar estos conceptos y entender su diferencia.

Ejemplo 2.6

Sales de tu casa para dirigirte al mercado, ubicado a 600 metros; realizas algunas compras y regresas a tu casa.

a. ¿Qué distancia recorriste?

b. ¿Cuál fue el desplazamiento?



Solución

a. La **distancia** recorrida es la longitud del trayecto para ir al mercado y regresar de él a tu casa.

Por lo tanto, la distancia es igual a:

$$\mathbf{d = 600\ m + 600\ m = 1200\ m}$$

b. El desplazamiento se calcula con la siguiente fórmula:

$$\Delta x = x_f - x_0$$

Donde:

$$\Delta x \equiv desplazamiento,\ en\ metros$$
$$x_0 \equiv posición\ inicial,\ en\ metros$$
$$x_f \equiv posición\ final,\ en\ metros$$

Nota: el símbolo $\equiv$ significa “es equivalente a”.

Como el desplazamiento sólo mide el cambio de posición, y la posición inicial es igual a la posición final.

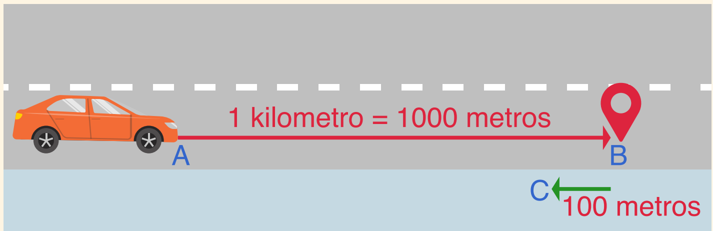
$$x_0 = 0\,m$$
$$x_f = 0\,m$$
$$\Delta x = x_f - x_0 = 0\,m - 0\,m = 0\,m$$

Ejemplo 2.7

Un automóvil se desplaza del punto A al punto B en línea recta y recorre un kilómetro. Posteriormente, retrocede 100 metros hasta el punto C.

a. ¿Qué distancia recorrió el automóvil?

b. ¿Cuál fue el desplazamiento?



Solución

a. La distancia recorrida es la longitud del trayecto del punto $\mathbf{A}$ al punto $\mathbf{B}$ más la longitud del trayecto del punto $\mathbf{B}$ al punto $\mathbf{C}$.

Por lo tanto, la distancia es igual a:

$$\mathbf{d} = 1000 \ \mathbf{m} + 100 \ \mathbf{m} = 1100 \ \mathbf{m}$$

b. El desplazamiento es el cambio de posición del punto A (inicial) al punto C (final):

$$x_0 = 0\,m$$
$$xf = 900m$$
$$\Delta x = x_f - x_0$$
$$\Delta x = 900m - 0m$$
$$\Delta x = 900m$$

¿Cuál es el resultado del desplazamiento?

2.4.2. Cálculo de la distancia y el desplazamiento en sistemas de referencia de dos dimensiones

A partir de dos o más dimensiones al desplazamiento se le denota como $\vec{r}$. La flecha que se encuentra por arriba de la letra r indica que se trata una cantidad vectorial (tiene dirección).

Ejemplo 2.8

Figura 21. Plano de la casa de Marco.

Marco vive cerca de la plaza central de su localidad. Se encuentra una cuadra al oeste y una al norte del cruce de las dos avenidas principales que fijaremos como nuestro origen. Marco va al mercado que se encuentra a tres cuadras al este y cuatro al norte del origen.

Ahora, Marco se mueve al mercado, para ello toma el siguiente recorrido:

1. Se mueve 3 cuadras al este (punto A).
2. Recorre 3 cuadras al norte (punto B).
3. Recorre otra cuadra al este (llega al mercado).

Figura 22. Plano de la casa de Marco con trayectoria recorrida.

a. ¿Qué distancia recorrió?

b. ¿Cuál fue el desplazamiento?

Solución

a. Para encontrar la distancia, debemos sumar la longitud de los trayectos.

1. De la casa de Marco al punto A = 3 cuadras = 300 metros.
2. Del punto A al punto B = 3 cuadras = 300 metros.
3. Del punto B al mercado = 100 metros.

$$\mathrm{d} = 300\ m + 300\ m + 100\ m$$

b. El desplazamiento es la distancia entre el punto final independientemente del recorrido, junto con la información de la dirección en la que se dio esa distancia. Para poder calcular este valor podemos observar que con las cuadras y la distancia en línea recta entre los dos puntos se forma un triángulo rectángulo.

Figura 23. Triángulo rectángulo de la trayectoria.

La magnitud del desplazamiento corresponde a la línea azul cielo que es la hipotenusa del triángulo rectángulo formado.

Las coordenadas iniciales y finales se pueden definir como:

- Casa de Marco: $(x_0, y_0) = (-1, 1)$
- Mercado: $(x_f, y_f) = (3, 4)$

La longitud de cada cateto se puede calcular obteniendo la diferencia de las coordenadas correspondientes. Para el cateto en dirección este-oeste debemos restar las coordenadas que se muestran como horizontales en el plano, es decir, la coordenada final x_f menos la coordenada inicial x_0 a lo que llamaremos Δx.

$$\Delta x = x_f - x_0$$
$$\Delta x = 3\,cuadras - (-1\,cuadra) = 3\,cuadras + 1\,cuadra$$
$$\Delta x = 4\,cuadras = 400\,m$$

Para el cateto en dirección norte-sur debemos restar las coordenadas que se muestran como verticales en el plano, es decir, la coordenada final y_f menos la coordenada inicial y_0 a lo que llamaremos Δy.

$$\Delta y = y_f - y_0$$
$$\Delta y = 4\,cuadras - 1\,cuadra$$
$$\Delta y = 3\,cuadras = 300\,m$$

Entonces, la magnitud del desplazamiento $\vec{r}$, que es equivalente al valor de la hipotenusa del triángulo cateto formado, puede ser obtenido usando el teorema de Pitágoras.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

En este caso la hipotenusa c corresponde a la magnitud de $\Delta\vec{r}$ y que se representa como $|\Delta\vec{r}|$, el cateto corresponde a $\Delta x = x_f - x_i$ y el cateto corresponde a $\Delta y = y_f - y_0$. Por lo tanto, tenemos que la magnitud del desplazamiento es:

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(x_f - x_0)^2 + (y_f - y_0)^2}$$
$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(400\,m)^2 + (300\,m)^2}$$
$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{160000\,m^2 + 90000\,m^2} = \sqrt{250000\,m^2}$$
$$|\Delta\vec{r}| = 500\,m$$

Ahora sólo nos falta el valor del ángulo. Para ello podemos volver a usar al mismo triángulo rectángulo.

Para calcular el valor del ángulo podemos usar la función tangente que relaciona los valores del cateto opuesto y adyacente con el ángulo.

$$\tan\theta = \frac{cateto\,opuesto}{cateto\,adyacente}$$

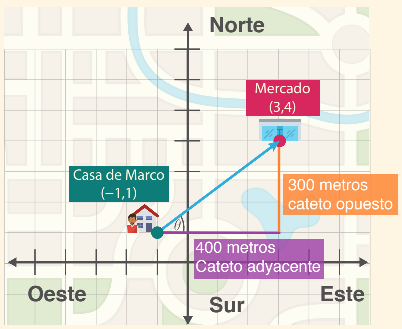


Figura 24. Cálculo del valor del ángulo.

Sustituyendo los valores tenemos:

$$\tan\theta = \frac{300\,\cancel{m}}{400\,\cancel{m}}$$

$$\tan\theta = 0.75$$
$$\theta = \tan^{-1} 0.75 = 36.89^\circ$$

Por lo tanto, podemos decir que el desplazamiento fue de 500 metros a 36.89°, dirección noreste o:

$$\Delta\vec{r} = (500\,m, 36.98^\circ)$$

A esta forma de expresar el desplazamiento que contiene información de la magnitud y el ángulo se le llama **forma polar**.

El desplazamiento se puede expresar en términos de sus componentes (400 m al este y 300 m al norte), pues con ellas se puede tener la misma información. A este tipo de expresión se le llama **forma cartesiana**. La expresión en este caso sería:

$$\Delta\vec{r} = (400\,m\widehat{\boldsymbol{E}} + 300\,m\widehat{\boldsymbol{N}})$$

o también:

$$\Delta\vec{r} = (400\,m, 300\,m)$$

2.4.3. Definición de vector

Además del desplazamiento existen más magnitudes que cuentan con dirección, como la corriente y la fuerza. Dichas magnitudes se pueden expresar igualmente de forma polar o cartesiana y la manera de obtener su magnitud y su ángulo será usando los mismos principios de trigonometría usados en el ejemplo 2.8. Su representación en el plano y en el espacio se suele hacer con el uso de flechas a las que llamaremos vectores. A continuación, vamos a detallar qué es un vector.

Un vector es un segmento orientado y queda determinado por dos puntos: la casa de Marco (–1,1) y el mercado (3,4). Su dirección es la recta en la que se encuentra y su sentido lo da la flecha que apunta desde A hasta D. Su módulo es la distancia entre la casa de marco y el mercado, se expresa poniendo el vector entre barras $|\Delta\vec{r}|$, o bien el módulo sin la flecha del vector, r.

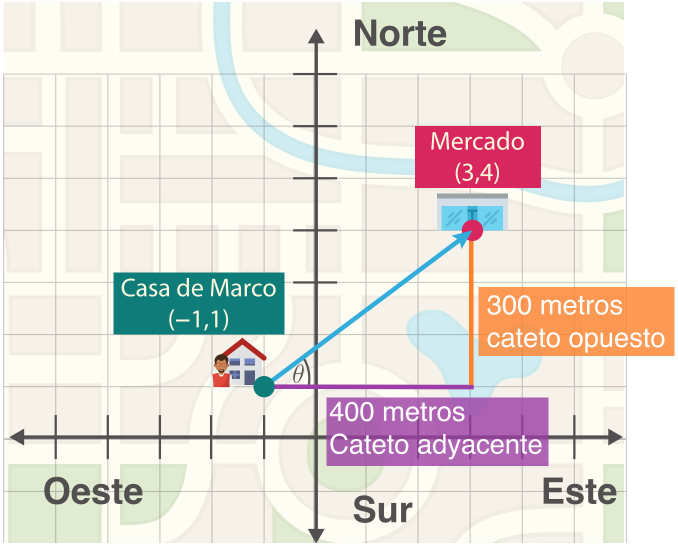


Figura 25. Vector r de la casa de Marcos.

El vector es equivalente si se traslada al origen pues corresponde a la misma magnitud de desplazamiento y al mismo ángulo.

Regresando al ejercicio, se puede constatar que el vector representado por la flecha azul tiene un **origen** (el punto (0,0)), un **destino** (el punto (3,4)), una magnitud o **módulo** (500 m) y un **sentido** (36.96° noreste).

Para realizar los cálculos con cierto grado de complejidad sería difícil representar los vectores únicamente con flechas; para estos cálculos, los vectores se representan con **magnitudes vectoriales** que están integradas por un número, una unidad y una orientación angular, por ejemplo 20 a 40 m.

Una magnitud **vectorial** se define por su **origen**, **módulo** (magnitud), **dirección** y **sentido**.

Figura 26. Vector equivalente.

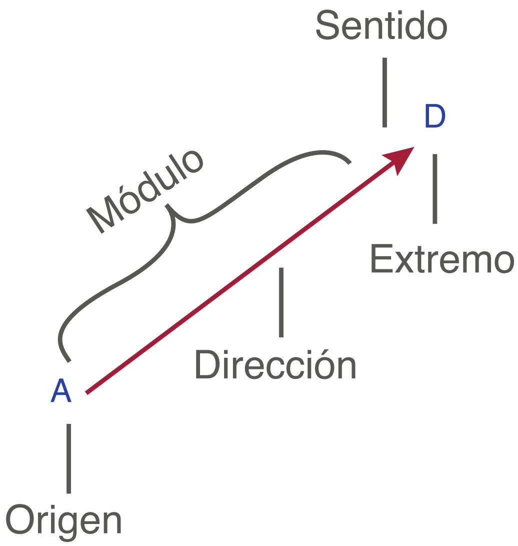
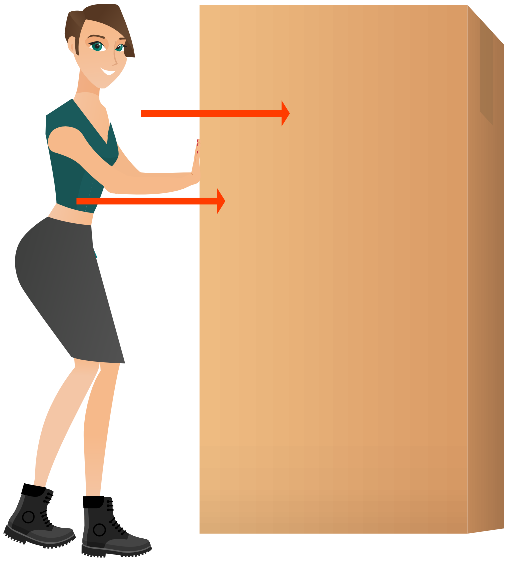


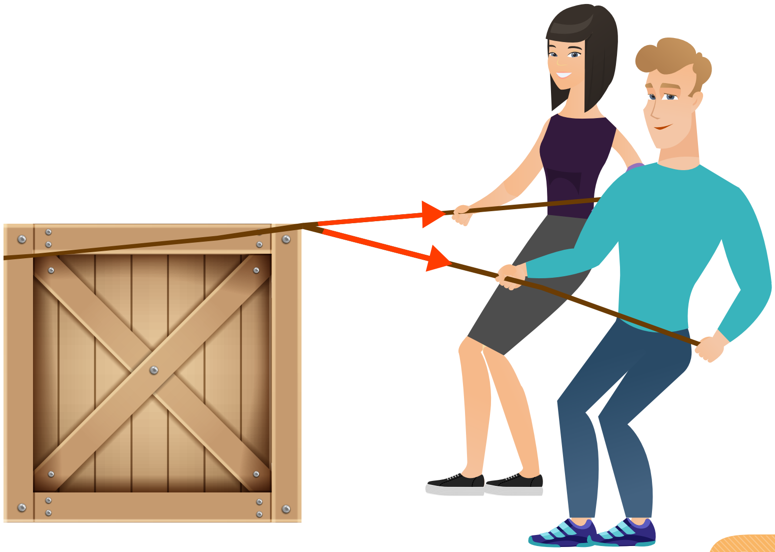
Figura 27. Ejemplo de un vector.

Consiste en un número, una unidad y una orientación angular. La magnitud vectorial es representada por un vector. Como el caso del desplazamiento en el ejemplo pasado.

En cambio, la magnitud **escalar** se define con sólo indicar su cantidad expresada en números y la unidad de medida, en este caso se representaría el módulo del vector. Como en el caso de la distancia.

Algunos ejemplos en los que se pueden representar vectores son los siguientes:





De acuerdo con la posición y dirección, los vectores pueden clasificarse en diferentes tipos, como lo indica la siguiente figura:

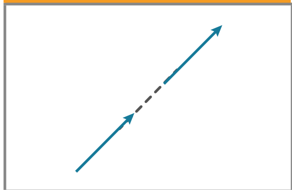
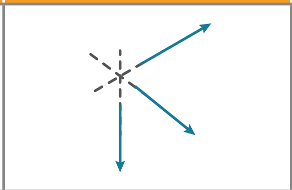
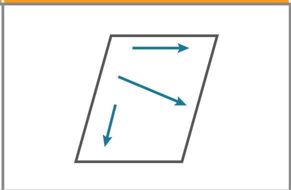
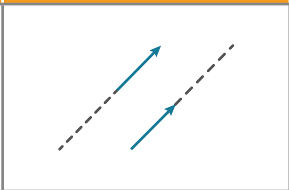
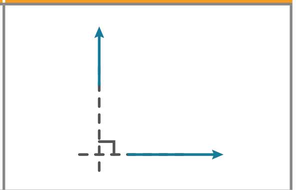
Colineales	Concurrentes	Coplanares	Paralelos	Perpendiculares
				
Están contenidos en una misma recta.	Se intersecan en un único punto.	Están contenidos en un mismo plano.	Tienen direcciones paralelas.	Tienen direcciones perpendiculares.

Figura 28. Tipos de vectores.

Se debe tomar en cuenta que los tipos de vectores de la imagen anterior pueden contener **vectores opuestos**, por ejemplo:

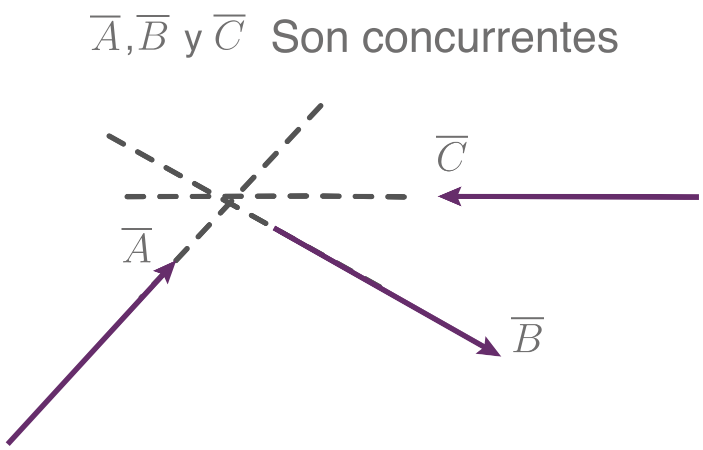


Figura 29. Vectores opuestos.

O los **colineales**:

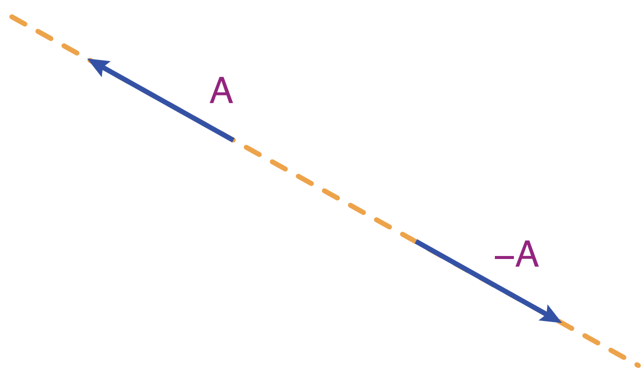


Figura 30. Ejemplo de vectores colineales.

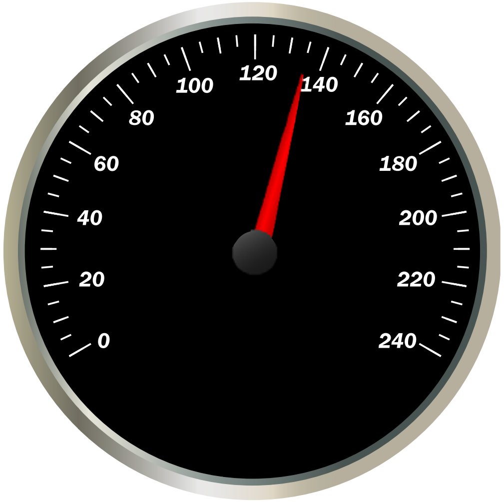
Tip de aprendizaje

Para reforzar lo aprendido, identifica en tu entorno situaciones que se puedan representar por medio de diferentes tipos de vectores (colineales, concurrentes, coplanares, paralelos y perpendiculares).

3. Movimiento rectilíneo uniforme

3.1. Velocidad y rapidez

¿Te parece familiar la siguiente imagen?



Sin embargo, lo que quizá no te resultará tan familiar es que a pesar de que se le conoce como velocímetro, usado en vehículos móviles, debería llamarse *rapidímetro*, ya que mide una magnitud únicamente.

En la actualidad existen equipos satelitales de posicionamiento global, los cuales no sólo permiten conocer la rapidez de un objeto, sino que además en la pantalla representa la dirección y el sentido. Es decir, este equipo muestra realmente la velocidad de un automóvil.

Estos aparatos son muy fáciles de confundir, usados a menudo como equivalentes para referirse a uno u otro.

Pero la **rapidez** representa un valor numérico, **una magnitud**; por ejemplo, 30 km/h.

En cambio, **la velocidad** representa un **vector** que incluye un **valor numérico** (30 km/h) y que además posee un **sentido** y una **dirección**.

La **rapidez** se calcula o se expresa en relación a la **distancia** recorrida en cierta unidad de **tiempo**, cuya fórmula general es la siguiente:

$$v = \frac{d}{t}$$

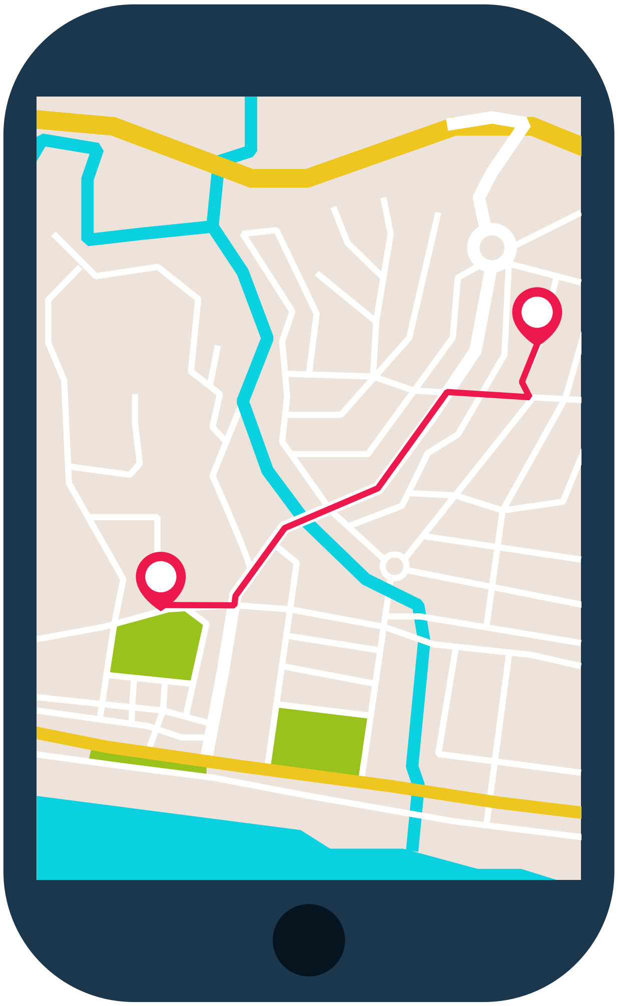
Se usa para representar la rapidez, la cual es igual al cociente entre la distancia recorrida y el tiempo empleado para hacerlo.

Si se despeja la distancia de la fórmula de la rapidez, para ello se multiplica el tiempo en ambas partes de la ecuación, de esta manera, la distancia estará dada por:

$$v = \frac{d}{t}$$

$$t \cdot v = \frac{d}{\cancel{t}} \cdot \cancel{t} \Rightarrow d = v \cdot t$$

Lo que significa que la distancia recorrida por un móvil se obtiene de multiplicar su rapidez por el tiempo empleado.



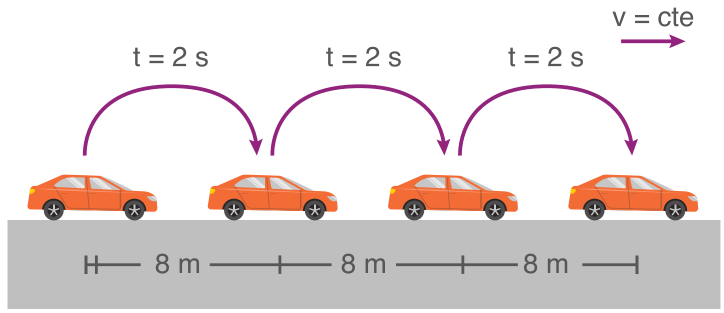
A su vez, si se desea calcular el tiempo empleado en recorrer cierta distancia se usa:

$$d = v \cdot t$$

$$\frac{d}{v} = \frac{\cancel{v}t}{\cancel{v}} \Rightarrow t = \frac{d}{v}$$

El tiempo está dado por el cociente entre la distancia recorrida y la rapidez con que se hace.

La siguiente imagen muestra lo que significa una velocidad constante, eso significa que va a la misma rapidez y dirección.

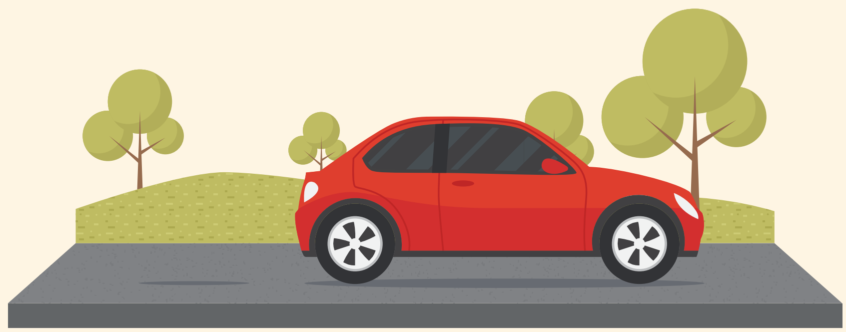


En este ejemplo el auto recorre 8 metros cada dos segundos, es decir, tiene una rapidez de: $v = \frac{d}{t} = \frac{8\,m}{2\,s} = 4\frac{m}{s}$

Ejemplo 3.1

Un automóvil se desplaza con una **rapidez** de 30 m por segundo. Calcula la distancia que recorrerá en 12 segundos.

Solución



Analiza los datos proporcionados:

$$v = 30\,\frac{m}{s}$$
$$t = 12\,s$$
$$d = ?$$

Se aplica la fórmula conocida y se despeja:

$$v = \frac{d}{t} \Rightarrow d = v \cdot t$$

Y se reemplaza con los datos conocidos:

$$d = v \cdot t = \left(30\frac{m}{\cancel{s}}\right)(12\cancel{s}) = 360\,m$$

Cuando se busca definir qué es la rapidez, comúnmente se dice que es la **velocidad con que algo se mueve** o se puede explicar de forma más científica como **la distancia recorrida en una unidad de tiempo**. En la vida diaria se utiliza la primera definición y se suele decir que el objeto más rápido tiene una velocidad más alta. **La rapidez no muestra la dirección del movimiento**, ya que sólo da la magnitud de la distancia tomada en un momento dado.En otras palabras, es una **magnitud escalar**.

3.1.1. Diferencia entre velocidad y rapidez

En la vida diaria, los conceptos de velocidad y rapidez son tomados como sinónimos, sin embargo, en la física estos conceptos corresponden a dos conceptos distintos, ya que la **rapidez** es una magnitud **escalar**, correspondiente a la **distancia entre el tiempo**, y la **velocidad** es una magnitud **vectorial**, correspondiente al vector **desplazamiento entre el tiempo**, por lo que incluye información sobre la dirección.

Tabla 8. Diferencia entre rapidez media y velocidad media.

Nombre	Símbolo	Tipo de magnitud	Definición	Definición
Rapidez media	v	Escalar	Distancia recorrida por unidad de tiempo	$v = \frac{d}{t}$ $rapidez = \frac{distancia}{tiempo}$
Velocidad media	$\vec{v}$	Vectorial	Desplazamiento total recorrido por unidad de tiempo	$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{t}$ $velocidad = \frac{desplazamiento}{tiempo}$

Ejemplo 3.2

Para darle un mayor contexto a estas definiciones veamos el siguiente ejemplo. Supongamos que dos amigos salen al mismo tiempo de un parque en la Ciudad de México (el parque El Batán). Cada quien toma una ruta distinta, uno se va por una vía rápida (color morado) y el otro toma una ruta de menor velocidad, pero más corta (color azul). Google Maps marca para la ruta en color morado una distancia de 9.1 km en 16 minutos y para la ruta en color azul, 6.4 km en 14 minutos. Calculemos:

a. La rapidez media de cada una de las rutas.

b. La velocidad media en cada una de las rutas.

Solución

a. Rapidez. Para medir la rapidez de necesitamos los valores de la distancia y el tiempo, los cuales nos proporciona la aplicación.

Para la ruta en morado tenemos:

$$v = \frac{v}{t}$$

$$v = \frac{9.1\,km}{16\,min} = 0.56875\frac{km}{min}$$

Convertimos las unidades a km/h para tener una unidad de medida más común.

$$0.56875\frac{km}{\cancel{min}}\left(\frac{60\,\cancel{min}}{1\,hora}\right) = 34.125\frac{km}{h}$$

Para la ruta en azul:

$$v = \frac{v}{t}$$

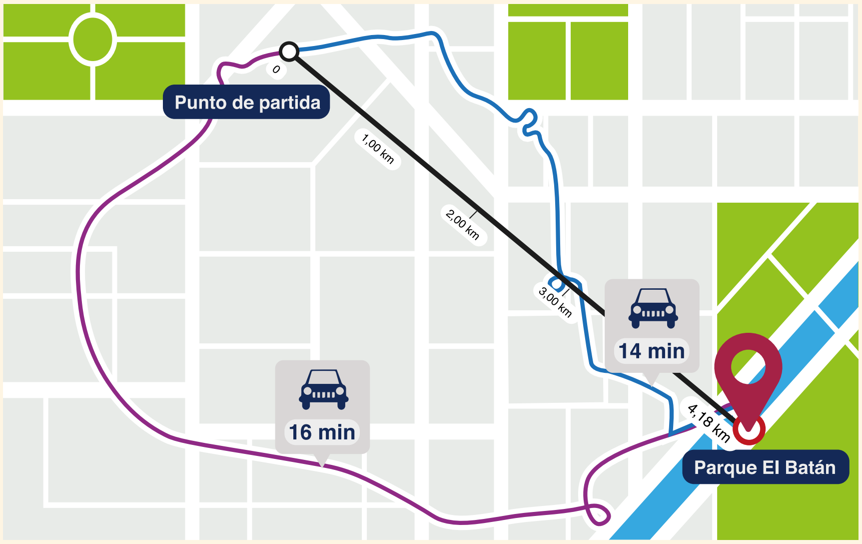
$$v = \frac{6.4\,km}{14\,min} = 0.45714\frac{km}{min}$$

Convertimos las unidades a km/h para tener una unidad de medida más común:

$$0.45714\frac{km}{\cancel{min}}\left(\frac{60\,\cancel{min}}{1\,hora}\right) = 27.428\frac{km}{h}$$

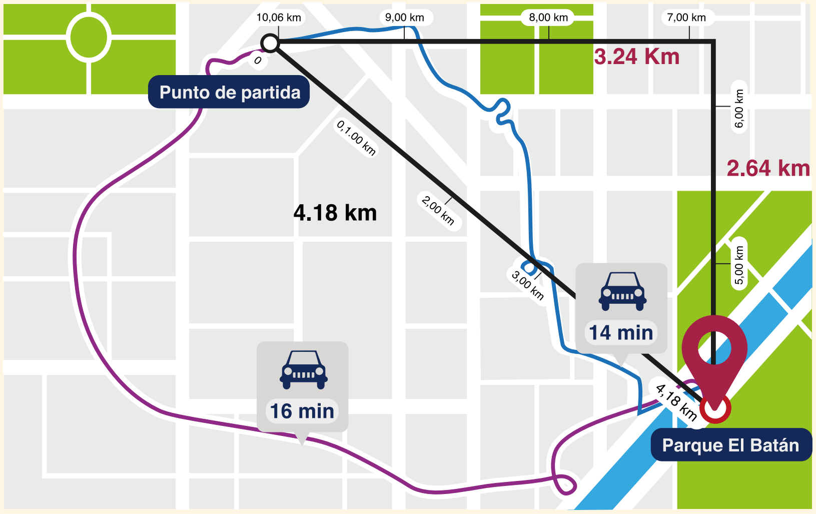
Por lo tanto, en la ruta morada se recorre a una mayor rapidez (34.125 km/h) que la ruta en azul (27.428 km/hr).

b. Velocidad. Para medir la velocidad requerimos del vector desplazamiento. Para ello medimos la distancia en línea recta.



La magnitud del desplazamiento marca 4.18 km.

Para calcular el ángulo del desplazamiento construimos un triángulo rectángulo y medimos en el mapa la longitud de sus catetos, que son de 3.24 km y 2.64 km, respectivamente.



Entonces usamos la función tangente. Para evitar confusiones, al igual que en un plano cartesiano, se usa un valor positivo si el desplazamiento es hacia el norte o el este (arriba o derecha) y negativo si es hacia el oeste o el sur (abajo o izquierda).

$$\tan\theta = \frac{desplazamiento\, Este - Oeste}{desplazamiento\, Norte - Sur}$$

$$\tan\theta = \frac{2.64\, km\, Sur}{3.24\, km\, Este}$$

$$\tan\theta = \frac{-2.64\, km}{+3.24\, km} = -0.8184$$

Usamos la función tangente inversa y despejamos el ángulo.

$$\theta = \tan^{-1}(-0.8184) = -39.3°$$

Esto significa que el ángulo es de 39.3° al sureste. Con esto podemos obtener el desplazamiento.

$$\Delta\vec{r} = (4.18km, -39.3°)$$

o

$$\Delta\vec{r} = (4.18km, 39.3°\ Sureste)$$

Como ambos autos llegan al mismo punto ambos tienen el mismo desplazamiento, por lo tanto la velocidad $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{t}$ solo será distinta porque se manejan tiempos distintos.

Para el auto que tomó la ruta en morado tenemos:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{t} = \frac{(4.18\,km, -39.3°)}{t}$$

Como el tiempo es una magnitud escalar y no tiene dirección, la división del vector desplazamiento entre el tiempo será la división de sus magnitudes al mismo ángulo.

$$\vec{v} = \left(\frac{|\Delta\vec{r}|}{t}, \theta\right)$$

Dado que ambas rutas comienzan y terminan en el mismo punto la magnitud del desplazamiento es en ambas de 4.18 km, la diferencia radica en el tiempo. Para la ruta en morado tenemos.

$$\vec{v} = \left(\frac{|\Delta\vec{r}|}{t}, -39.3°\right)$$
$$\vec{v} = \left(\frac{4.18\,km}{16\,min}, -39.3°\right)$$
$$\vec{v} = \left(0.26125\frac{km}{min}, -39.3°\right)$$

Convertimos la magnitud de la velocidad a km/h.

$$|\vec{v}| = 0.26125\frac{km}{\cancel{min}}\left(\frac{60\cancel{min}}{1\,h}\right) = 15.675\frac{km}{h}$$

Por lo tanto la velocidad del auto que tomó la ruta morada fue de:

$$\vec{v} = \left(15.675\frac{km}{h}, -39.9°\right)$$
o
$$\vec{v} = \left(15.675\frac{km}{h}, 39.9°\ Sureste\right)$$

Para el auto que tomó la ruta en azul, la velocidad es:

$$\vec{v} = \left(\frac{|\Delta\vec{r}|}{t}, -39.3°\right)$$
$$\vec{v} = \left(\frac{4.18\,km}{14\,min}, -39.3°\right)$$
$$\vec{v} = \left(0.29857\frac{km}{min}, -39.3°\right)$$

Convertimos la magnitud de la velocidad a km/h.

$$|\vec{v}| = 0.26125\frac{km}{\cancel{min}}\left(\frac{60\cancel{min}}{1\,h}\right) = 15.675\frac{km}{h}$$

Por lo tanto la velocidad del auto que tomó la ruta azul fue de:

$$\vec{v} = \left(17.914\frac{km}{h}, -39.9°\right)$$
$$o$$
$$\vec{v} = \left(17.914\frac{km}{h}, 39.9°\,Sureste\right)$$

Por consiguiente, en este caso el auto de la ruta azul es más veloz.

De los problemas anteriores podemos concluir que en la ruta morada el auto va con mayor rapidez, mientras que en la ruta azul el auto tiene una mayor magnitud de su velocidad.

3.1.2. Suma de vectores

Cuando tenemos dos magnitudes escalares, sumarlas o restarlas es una simple operación. Pero cuando trabajamos con vectores no es tan simple, sobre todo cuando los vectores tienen distintas direcciones. Para que podamos sumar dos vectores, estos deben ser colineales, es decir, que se encuentran en la misma dirección. En el tema 2.4.2 vimos cómo sumar desplazamientos que van en la misma dirección. Para cuando las direcciones son distintas lo conveniente es usar la forma cartesiana de los vectores y realizar la suma de los componentes para obtener el vector resultante. Para ejemplificar lo anterior se muestra el siguiente ejercicio.

Ejemplo 3.3

Una lancha sale del puerto y recorre 5 km a 30° al noreste. Al llegar a ese punto cambia su dirección a 60° hacia el noroeste y avanza otros 2 kilómetros como muestra la figura 31. Si la lancha realizó el trayecto en 6 minutos, ¿cuál fue su velocidad media?

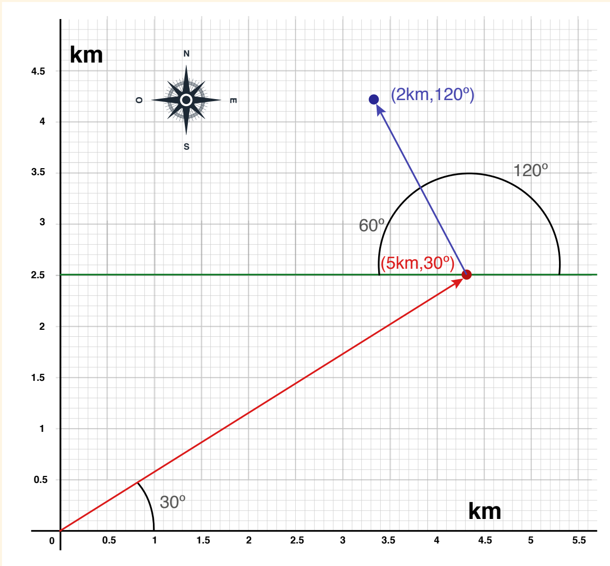


Figura 31. Diagrama del ejemplo planteado.

Solución

Para llevar el procedimiento de manera más simple, tomaremos a la dirección este-oeste como el eje x (este positivo y oeste negativo) y la dirección norte-sur como el eje y (norte positivo y sur negativo).

Para tener la velocidad, requerimos el tiempo y el desplazamiento, comencemos con el desplazamiento.

Sabemos que no es posible sumar directamente vectores que no son colineales, pero si formamos triángulos rectángulos en cada uno de los desplazamientos usándolo como la hipotenusa, observamos que tenemos a los catetos opuestos en la misma dirección (y) y de manera similar con los adyacentes (x).

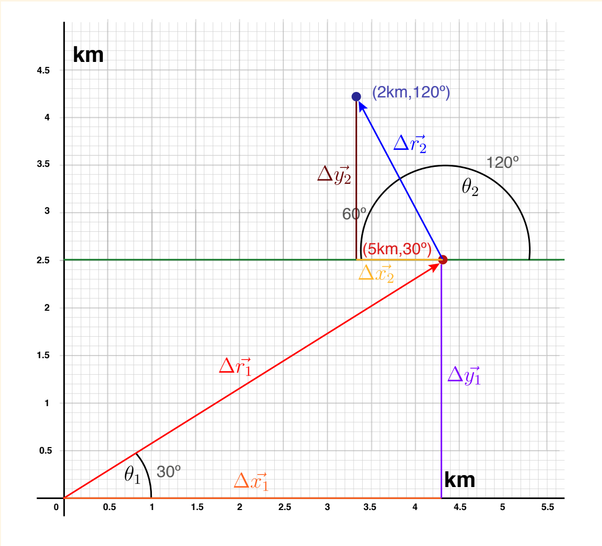


Figura 32. Diagrama resuelto del problema planteado.

Dado que el desplazamiento sólo depende del punto inicial y final, será lo mismo si en lugar de sumar los desplazamientos por los caminos en rojo y azul (hipotenusas), sumamos los desplazamientos por los caminos en naranja, morado, amarillo y café (catetos).

Para el primer desplazamiento al que llamaremos $\Delta\vec{r_1}$, usamos la función coseno para despejar el valor del cateto adyacente (componente en x que llamaremos $\Delta\vec{x_1}$) que se muestra en color naranja.

$$\cos\theta_1 = \frac{cateto\,adyacente}{hipotenusa}$$

$$\cos\theta_1 = \frac{\Delta\vec{x_1}}{|\Delta\vec{r_1}|}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\Delta\vec{x_1}}{5\,km}$$

Despejamos $\Delta\vec{x_1}$ y resulta:

$$\Delta\vec{x_1} = 5\,km(\cos 30^\circ) = 4.33\,km\,\hat{\boldsymbol{x}}$$

Donde $\hat{\boldsymbol{x}}$ se refiere al vector de dirección este.

Para obtener el valor del cateto opuesto (componente en y que llamaremos $\Delta\vec{y_1}$) que se muestra en color morado usamos la relación seno.

$$sen\,\theta_1 = \frac{cateto\,opuesto}{hipotenusa}$$

$$sen\,\theta_1 = \frac{\Delta\vec{y_1}}{|\Delta\vec{r_1}|}$$

$$sen\,30^\circ = \frac{\Delta\vec{y_1}}{5\,km}$$

Despejamos $\Delta\vec{y_1}$ y resulta:

$$\Delta\vec{y_1} = 5\,km(sen\,30^\circ) = +2.5\,km\,\hat{\boldsymbol{y}}$$

Donde $\hat{\boldsymbol{y}}$ se refiere al vector de dirección norte.

Para el segundo desplazamiento al que llamaremos $\Delta\vec{r_2}$. usamos la función coseno para despejar el valor del cateto adyacente (componente en x que llamaremos $\Delta\vec{x_2}$) que se muestra en color amarillo.

$$\cos\theta_2 = \frac{cateto\,adyacente}{hipotenusa}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{\Delta\vec{x_2}}{|\Delta\vec{r_2}|}$$

$$\cos 120^\circ = \frac{\Delta\vec{x_2}}{2\,km}$$

Despejamos $\Delta\vec{x_2}$ y resulta.

$$\Delta\vec{x_2} = 2\,km(\cos 120^\circ) = -1\,km\,\hat{\boldsymbol{x}}$$

Para obtener el valor del cateto opuesto (componente en y que llamaremos $\Delta\vec{y_2}$) que se muestra en color café usamos la relación seno.

$$sen\,\theta_2 = \frac{cateto\,opuesto}{hipotenusa}$$

$$sen\,\theta_2 = \frac{\Delta\vec{y_2}}{|\Delta r_1|}$$

$$sen\,120^\circ = \frac{\Delta\vec{y_2}}{2\,km}$$

Despejamos $\Delta\vec{y_2}$ y obtenemos.

$$\Delta\vec{y_2} = 2\,km(sen\,120^\circ) = 1.732\,km\,\hat{\boldsymbol{y}}$$

Finalmente, ya contamos con los trayectos $\Delta\vec{x_1}$, $\Delta\vec{y_1}$, $\Delta\vec{x_2}$y $\Delta\vec{y_2}$. Por lo que realizamos la suma de los trayectos para encontrar al desplazamiento total que nombraremos $\Delta\vec{r_t}$.

$$\Delta\vec{r}_t = \Delta\vec{x}_1 + \Delta\vec{y}_1 + \Delta\vec{x}_2 + \Delta\vec{y}_2$$
$$\Delta\vec{r}_t = +4.33\,km\,\hat{\boldsymbol{x}} + 2.5\,km\,\hat{\boldsymbol{y}} - 1\,km\,\hat{\boldsymbol{x}} + 1.732\,km\,\hat{\boldsymbol{y}}$$
$$\Delta\vec{r}_t = +4.33\,km\,\hat{\boldsymbol{x}} - 1\,km\,\hat{\boldsymbol{x}} + 2.5\,km\,\hat{\boldsymbol{y}} + 1.732\,km\,\hat{\boldsymbol{y}}$$

Sumando lo vectores colineales en $\hat{\boldsymbol{x}}$ y en $\hat{\boldsymbol{y}}$.

$$\Delta\vec{r}_t = (4.33\,km - 1\,km)\,\hat{\boldsymbol{x}} + (2.5\,km + 1.732\,km)\,\hat{\boldsymbol{y}}$$
$$\Delta\vec{r}_t = (3.33\,km)\,\hat{\boldsymbol{x}} + (4.232\,km)\,\hat{\boldsymbol{y}}$$

Esta expresión corresponde a la forma cartesiana del desplazamiento total.

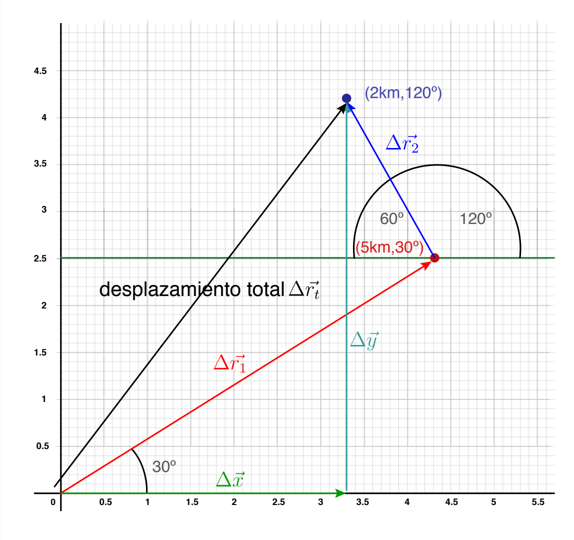


Figura 33. Forma cartesiana del desplazamiento total.

Para obtener la magnitud del desplazamiento usamos el teorema de Pitágoras donde los catetos son las coordenadas del desplazamiento total.

$$\Delta\vec{x} = 3.33\,km$$
$$\Delta\vec{y} = 4.232\,km$$

Y la hipotenusa es la magnitud del desplazamiento total $|\Delta\vec{r}_t$. Con lo que tenemos:

$$hipotenusa = \sqrt{(cateto\,adyacente)^2 + (cateto\,opuesto)^2}$$

$$|\Delta\vec{r}_t| = \sqrt{(\Delta\vec{x})^2 + (\Delta\vec{y})^2}$$

$$|\Delta\vec{r}_t| = \sqrt{(3.33\,km)^2 + (4.232\,km)^2}$$

$$|\Delta\vec{r}_t| = \sqrt{11.0889\,km^2 + 17.9098\,km^2}$$

$$|\Delta\vec{r}_t| = \sqrt{28.9987\,km^2}$$

$$|\Delta\vec{r}_t| = 5.385\,km$$

Para calcular el ángulo usamos la función tangente.

$$\tan\theta = \frac{cateto\,opuesto}{cateto\,adyacente}$$

$$\tan\theta = \frac{\Delta\vec{y}}{\Delta\vec{x}}$$

$$\tan\theta = \frac{4.232\,km}{3.33\,km} = 1.2708$$

$$\theta = \tan^{-1}(1.2708) = 51.8°$$

Con esto podemos calcular el desplazamiento en su forma polar.

$$\Delta\vec{r} = (5.385\,km, 51.8°)$$

Finalmente, para obtener la velocidad requerimos dividir este desplazamiento entre el tiempo. El tiempo es de 6 minutos, convertimos ese tiempo a horas para que nos queden las unidades de km/h al dividir.

$$6\,\cancel{minutos}\left(\frac{1\,hora}{60\,\cancel{minutos}}\right) = 0.1\,horas$$

Para obtener la velocidad media dividimos la magnitud del desplazamiento entre este tiempo y el ángulo será el mismo del desplazamiento.

$$\vec{v} = \left(\frac{|\Delta\vec{r}|}{t}, \theta\right)$$

$$\vec{v} = \left(\frac{5.385\,km}{0.1\,h}, 51.8°\right)$$

$$\vec{v} = \left(53.85\frac{km}{h}, 51.8°\right)$$

Por lo tanto la velocidad media de la lancha es de 53.85 km/h a 51.8° dirección noreste.

3.2. Primera ley de Newton

Si te ha tocado viajar de pie en un autobús sabrás que es importante tener algo para sostenerse, como los pasamanos o los tubos del asiento. Además, entre más rápido vaya el autobús más peligroso es no sostenerte, la principal razón es porque si frena de golpe sabes que podrías salir disparado hacia el frente. ¿A qué se debe esto?

En la física se trata de explicar los fenómenos y el funcionamiento de la naturaleza, entre ellos el movimiento, fenómeno que es tratado por la rama de la física llamada mecánica. Los estudios más importantes sobre mecánica fueron realizados por Isaac Newton (1642-1727) y presentados en sus libros titulados *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, en los cuales estableció las bases de la mecánica clásica mediante las leyes que llevan su nombre.

En esta ocasión vamos a tratar con la que conocemos como la ***primera ley de Newton*** que enuncia lo siguiente:

"Todo cuerpo continúa en su estado de reposo o movimiento uniforme en línea recta, no muy lejos de las fuerzas impresas a cambiar su posición".

Esto significa que si un cuerpo lleva cierta velocidad (rapidez y dirección), ésta va a seguir así, hasta que una fuerza venga a cambiarlo. Si un movimiento no cambia de dirección su trayectoria será una línea recta. Al movimiento que se realiza en línea recta se le llama **movimiento rectilíneo**. Si además se da a una rapidez constante, que no cambia en el tiempo se le conoce como **movimiento rectilíneo uniforme** o **MRU**.

Regresemos al ejemplo del autobús, ¿qué tiene que ver con la primera ley de Newton? Justamente cuando una persona (un cuerpo), viaja al interior del autobús adquiere la misma velocidad que el autobús, en el momento que el vehículo frena, la persona **continúa en su estado de movimiento uniforme en línea recta**.

A esa tendencia natural que tienen los objetos en movimiento para seguir moviéndose a la misma velocidad (rapidez y dirección) a la que iban se le conoce como **inercia**.

El movimiento rectilíneo uniforme es el más sencillo que podemos encontrar como aproximación en la naturaleza, como por ejemplo una gota de agua que cae de una nube y alcanza la velocidad límite, o un automóvil en una carretera con velocidad constante de 100 Km/hr.

3.3. Parámetros que determinan una relación de comportamiento lineal

El juego de bolos o boliche consiste en que cada jugador lance una bola para derribar la mayor cantidad de bolos.

Cuando el jugador suelta el bolo, éste sale a velocidad constante y en línea recta como indica la primera ley de Newton.

Supongamos que marcamos como el origen al inicio de la pista de boliche y dos jugadores sueltan la bola al mismo tiempo. Si vamos registrando la posición de cada pelota en cada segundo a partir de que los jugadores sueltan la bola se produce la siguiente tabla.

Tabla 9. Registro de las posiciones de las bolas de boliche a lo largo del tiempo.

Tiempo en segundos	Posición en metros (bola 1)	Posición en metros (bola 2)
0	1	0
1	5	3
2	9	6
3	13	9
4	17	12

Para poder visualizar este movimiento, vamos a poner en una gráfica la posición de la bola comparado contra el tiempo y vamos a unir los puntos formados en la gráfica por cada movimiento.

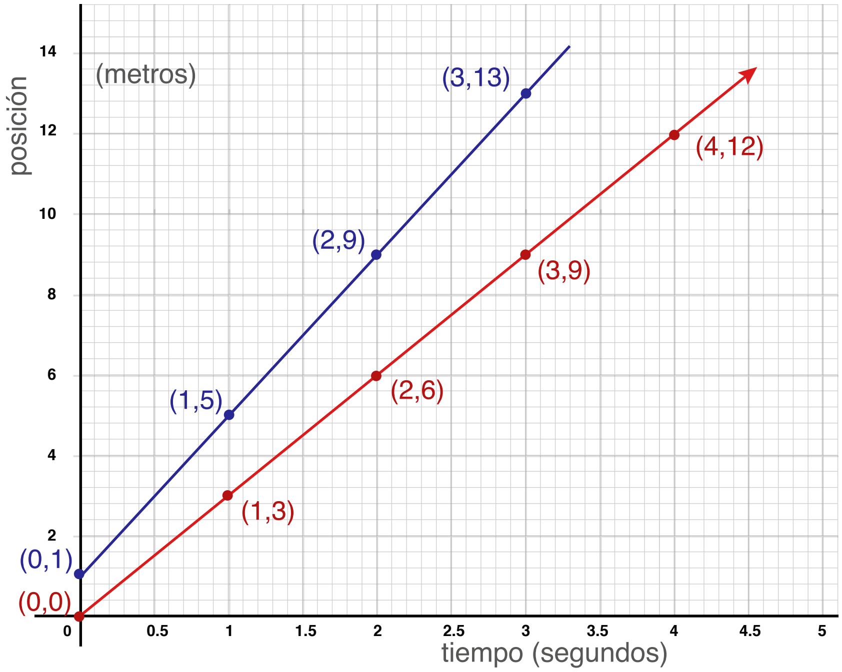


Figura 34. Gráfica de la posición de las bolas de boliche en función del tiempo.

Podemos observar que la gráfica de ambos movimientos describe una línea recta. Si queremos describir matemáticamente estos puntos tendríamos que encontrar la relación que hay entre el tiempo y la posición. Vamos a analizar el comportamiento de la bola 1 que viene graficada en color azul.

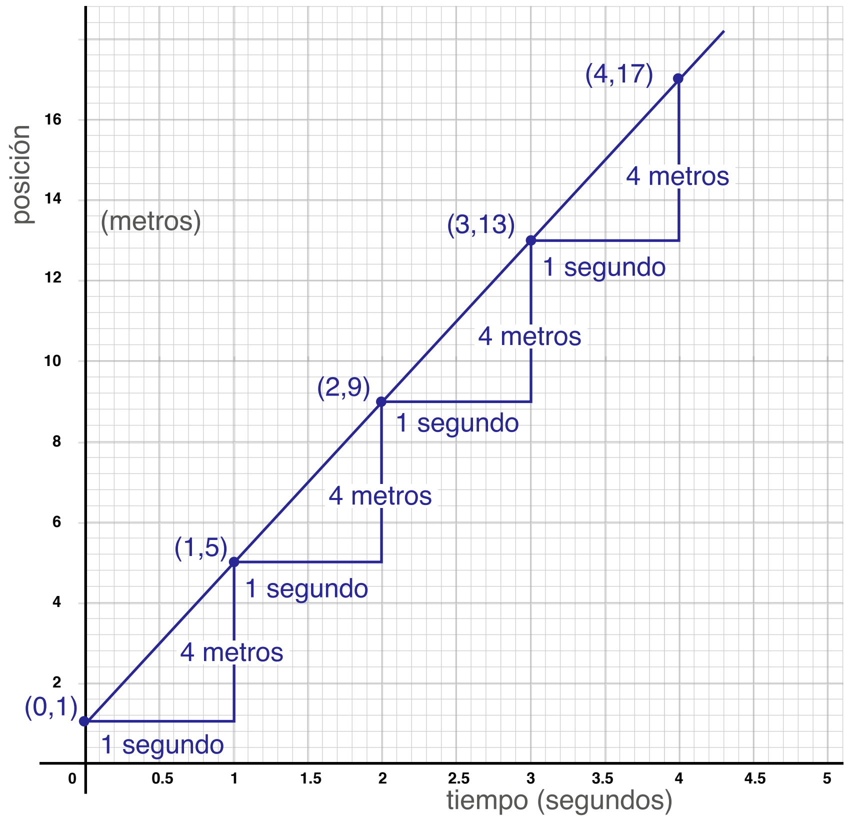


Figura 35. Gráfica de los cambios de la posición en función del tiempo de la bola 1.

Podemos observar que la posición que parte de 1 metro aumenta en 4 metros por cada segundo que pasa. De este modo la posición será igual a nuestro punto de partida (1 metro) más 4 metros por cada segundo que pasa.

posición final = 1 metro + (4 metros) x (tiempo en segundos)

Para simplificar la expresión vamos a representar el valor de la posición final como x_f y el valor del tiempo en segundos como *t*, de esta manera nos queda la siguiente ecuación.

$$x_f = 1 + 4t$$

Si sustituimos los tiempos de 0 a 4 segundos podemos observar que todos coinciden con la posición registrada.

$t = 0$

$$x_f = 1\,m + \left(4\,\frac{m}{\cancel{s}}\right)(0\,\cancel{s}) = 1\,m + 0\,m = 1\,m$$

$t = 1$

$$x_f = 1\,m + \left(4\,\frac{m}{\cancel{s}}\right)(1\,\cancel{s}) = 1\,m + 4\,m = 5\,m$$

$t = 2$

$$x_f = 1\,m + \left(4\,\frac{m}{\cancel{s}}\right)(2\,\cancel{s}) = 1\,m + 8\,m = 9\,m$$

$t = 3$

$$x_f = 1\,m + \left(4\,\frac{m}{\cancel{s}}\right)(3\,\cancel{s}) = 1\,m + 12\,m = 13\,m$$

$t = 4$

$$x_f = 1\,m + \left(4\,\frac{m}{\cancel{s}}\right)(4\,\cancel{s}) = 1\,m + 16\,m = 17\,m$$

En el caso de la segunda bola de boliche (gráfica en rojo), podemos observar lo siguiente:

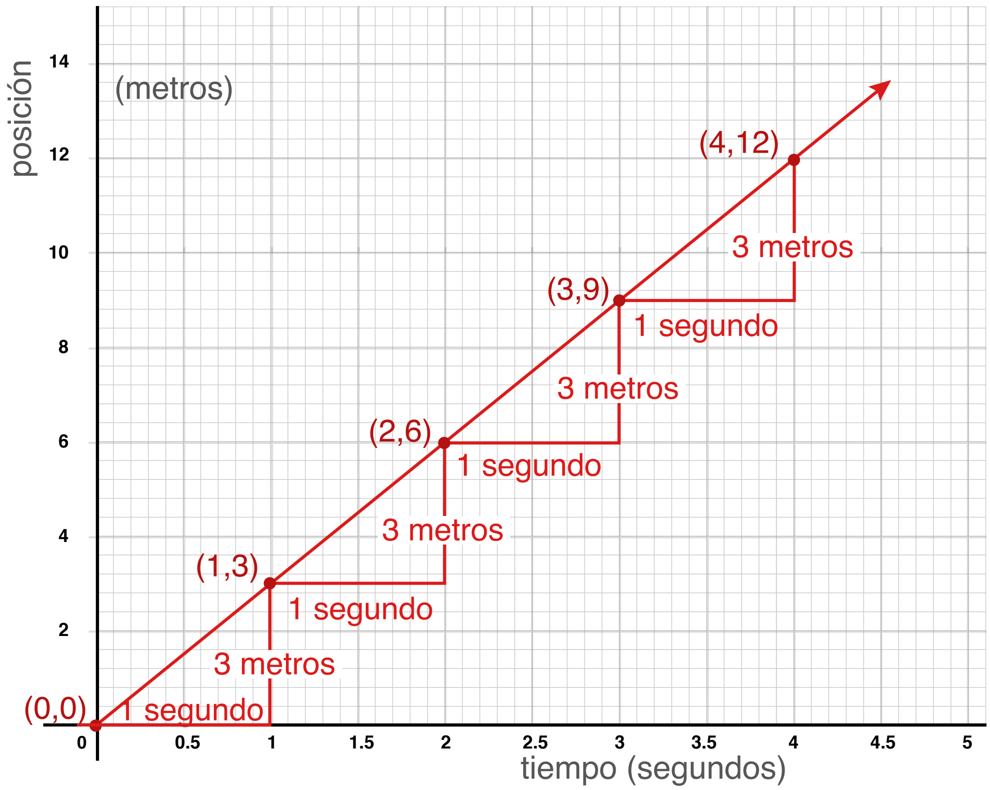


Figura 36. Gráfica de los cambios de la posición en función del tiempo de la bola 2.

En este caso, la bola parte de la posición $x = 0$ y cada segundo avanza 3 metros cada segundo. Por lo que la relación matemática que describe lo anterior es:

posición final = 0 metros + (3 metros) x (tiempo en segundos)

Usando la misma notación que en el caso anterior la posición está dada por: $x_f = 3t$

En este caso es más simple verificar que la posición es el triple del tiempo, lo que coincide con los datos de la tabla.

¿Qué tienen en común ambos movimientos? Hagamos una lista:

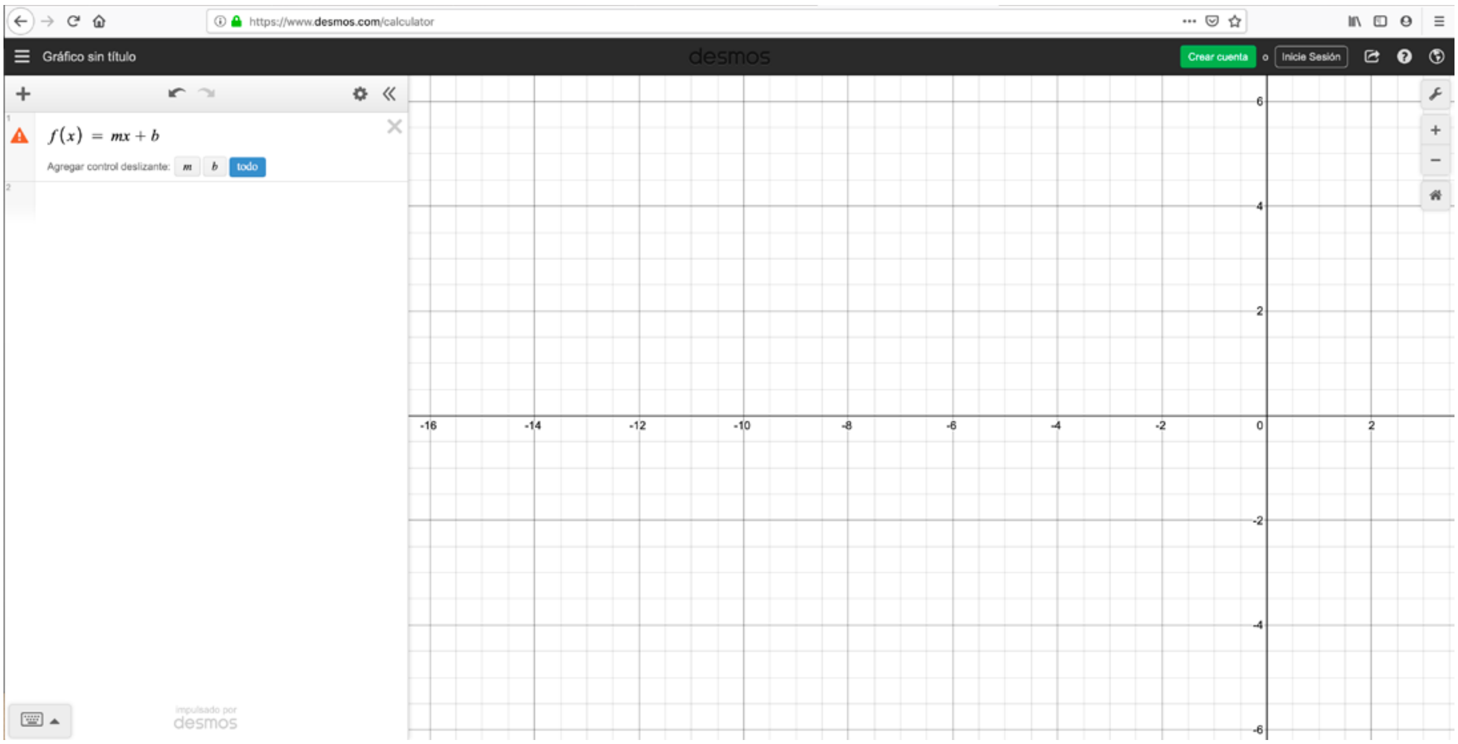
1. Ambos van a velocidad constante.
2. En ambas ecuaciones se suma el punto de partida que es un valor constante.
3. En ambas ecuaciones se multiplica una constante por la variable independiente (el tiempo).
4. En ambas ecuaciones la variable independiente (el tiempo) no está elevado a ningún exponente.
5. Ambas ecuaciones son de la forma $x_f = x_0 + vt$, donde x_0 es el valor de la posición inicial y v la rapidez de la bola.

A este tipo de comportamiento en donde la variable independiente depende de una función de primer grado, se le llama **función lineal**. Este tipo de funciones de la forma:

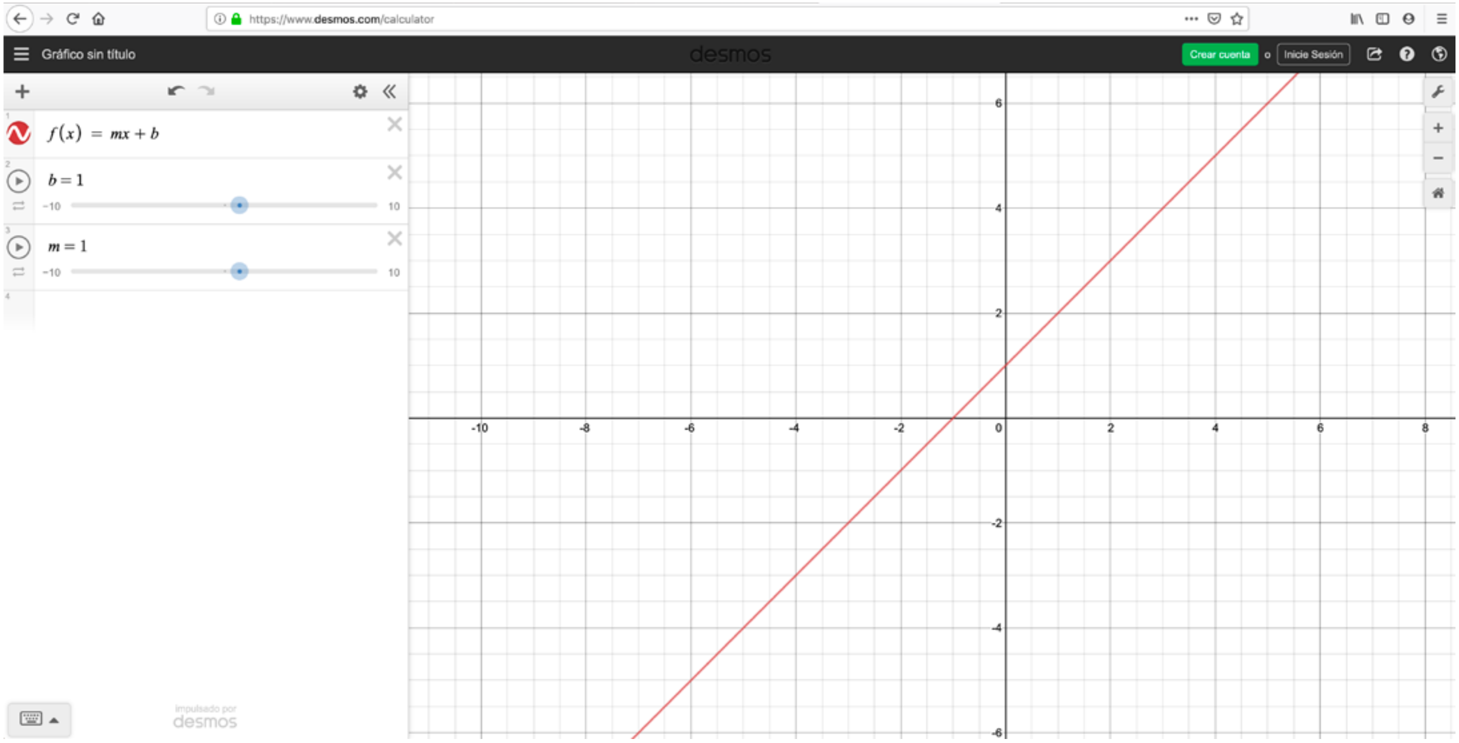
$$f(x) = mx + b$$

siempre generará la gráfica de una recta.

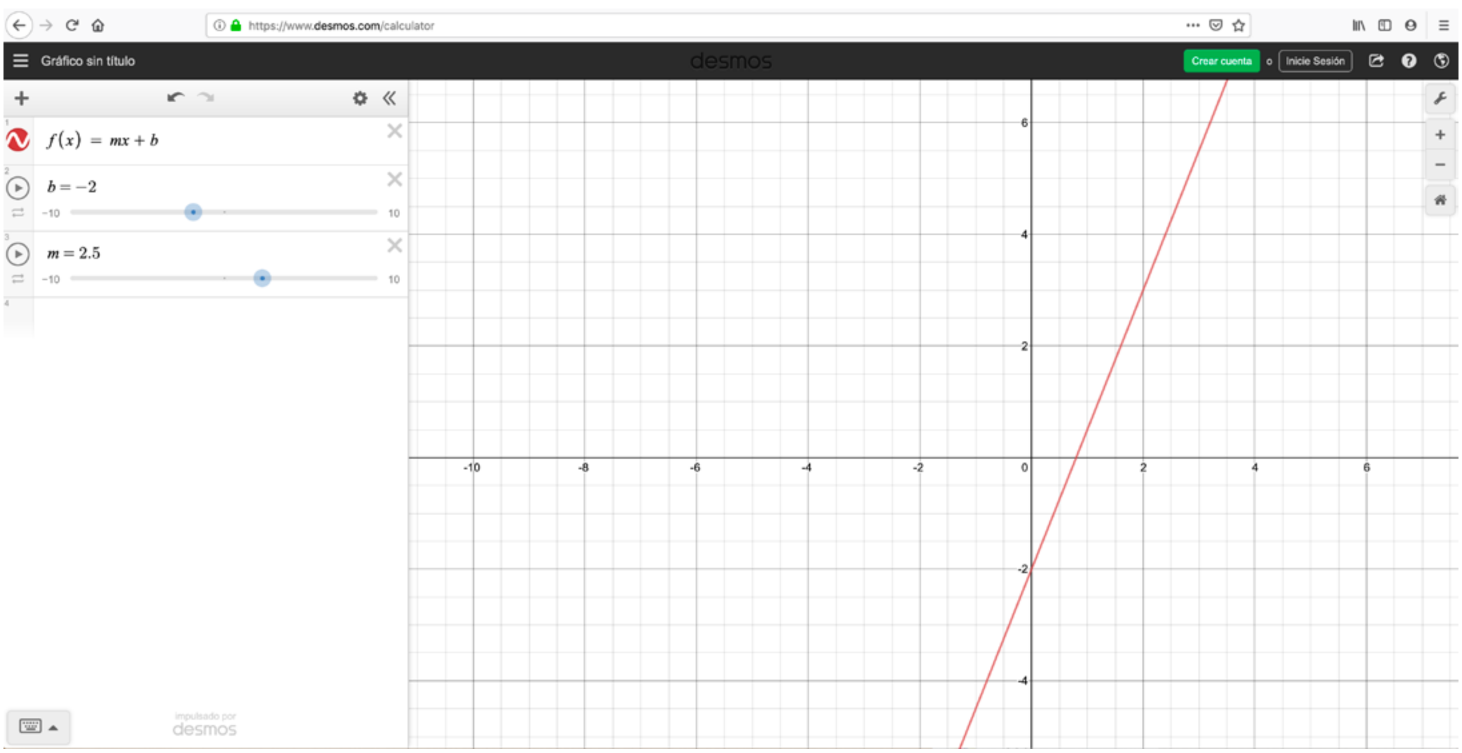
Para que sea más claro, podemos usar la graficadora Desmos y escribir la anterior ecuación, aparecerá:



Hacemos clic en donde dice “todo” y nos aparecerán los controles deslizantes de m y de b.



Si desplazas los valores de m y b puedes observar que m cambia la inclinación y b la intersección con el eje y de la línea recta, pero siempre se forma una línea recta.



Este tipo de comportamientos lineales va más allá. Cualquier comportamiento que se pueda describir como un polinomio de grado uno es un comportamiento lineal. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.4

En México, como en casi cualquier otro país, los ciudadanos tenemos la obligación de realizar el pago de impuestos, pues de ello depende que el país cuente con recursos para operar. Existe el impuesto sobre la renta (ISR), que es la cuota que hay que pagar en función del salario ganado. A continuación, se muestran las cuotas para el año 2019 en función del ingreso mensual.

Tabla 10. Cuotas 2019 en función del ingreso mensual.

Límite inferior $	Límite superior $	Cuota fija $	Por ciento para aplicarse el excedente del límite inferior) %
0.01	578.53	0.00	1.92
578.53	4 910.18	11.11	6.40
4 910.19	8 629.20	288.33	10.88
8 629.21	10 031.07	692.96	16.00
10 031.08	12 009.94	917.26	17.92
12 009.95	24 222.31	1 271.87	21.36
24 222.32	38 177.69	3 880.44	23.52
38 177.70	72 887.50	7 162.74	30.00
72 887.51	97 183.33	17 575.69	32.00
97 183.34	291 550.00	25 350.35	34.00
291 550.01	En adelante	91 435.02	35.00

Se oferta un puesto de trabajo que ofrece un salario bruto de $11 315.00 mensuales por honorarios asimilados (no incluye cuota del IMSS). ¿Cuál es el salario neto que cobraría en dicho puesto?

Solución

Para ello tenemos que poder plantear la función lineal que se explica en la tabla. En la tabla se menciona que el pago es de la cuota fija más un porcentaje sobre el excedente sobre el límite inferior. Esta expresión se puede resumir como:

ISR = cuota fija + (porcentaje) x (excedente)

Buscamos en la tabla cuál sería el límite inferior de $11 315.00 y encontramos que es $10 031.08.

Tabla 11. Cuotas 2019 en función del ingreso mensual.

Límite inferior $	Límite superior $	Cuota fija $	Por ciento para aplicarse el excedente del límite inferior) %
0.01	578.53	0.00	1.92
578.53	4 910.18	11.11	6.40
4 910.19	8 629.20	288.33	10.88
8 629.21	10 031.07	692.96	16.00
10 031.08	12 009.94	917.26	17.92
12 009.95	24 222.31	1 271.87	21.36
24 222.32	38 177.69	3 880.44	23.52
38 177.70	72 887.50	7 162.74	30.00
72 887.51	97 183.33	17 575.69	32.00
97 183.34	29 1550.00	25 350.35	34.00
291 550.01	En adelante	91 435.02	35.00

A partir de aquí podemos obtener los datos necesarios para completar la función.

Cuota fija = $ 917.26

Porcentaje = 17.92% = 0.1792

Excedente sobre límite inferior = x - $10 031.08.

Donde x es el ingreso. Por lo tanto, el ISR a pagar para salarios entre $10 031.08 y $12,009.94 está determinado por la función lineal:

ISR (x) = $917.26 + 0.1792 (x - $10 031.08)

Ahora, para el puesto de trabajo:

ISR ($11 315.00) =$917.26 + 0.1792($11 315.00 - $10 031.08)

ISR ($11 315.00) =$917.26 + 0.1792 ($1 283.92)

ISR ($11 315.00) =$917.26 + $230.08 = $1 147.34

Por lo tanto, el sueldo neto es:

Sueldo neto = Sueldo bruto - ISR = $11 315.00 - $1 147.34 = $ 10 167.66

3.4. La recta como lugar geométrico. Conceptos y ejemplos

La recta se define línea que se extiende en una misma dirección; también se puede describir como una sucesión continua e infinita de puntos extendidos en una sola dirección o como la trayectoria más corta entre dos puntos. La recta está asociada a un comportamiento lineal y para trazarla requerimos de dos cosas. Ya sea de dos puntos o un punto y su inclinación.

La recta es la forma más común en las estructuras arquitectónicas e infraestructuras. Por ejemplo, las carreteras buscarán usar la línea recta en la mayor medida posible mientras el terreno lo permita, por ejemplo, en las zonas del país donde predominan las llanuras las carreteras son rectas en su mayoría. Además, como vimos en el tema anterior, cualquier comportamiento lineal se puede relacionar con la gráfica de una recta.

La ecuación de una recta, que es una función lineal se expresa como:

$$y = mx + b$$

Esto significa que todos los puntos en el plano cuyas coordenadas coinciden con esa ecuación. Por ejemplo, el punto (2,5) pertenece a la recta $\boldsymbol{y = 2x + 1}$ pues cumple con la ecuación, es decir, si sustituimos los valores de las coordenadas en la ecuación se cumplirá con la igualdad.

$$y = 2x + 1$$
$$5 = 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5$$
$$5 = 5 \checkmark$$

Pero el punto (4,6) no está sobre la recta y lo podremos comprobar porque al sustituir las coordenadas $(x = 4, x = 6)$ no cumplirá con la ecuación.

$$y = 2x + 1$$
$$6 = 2(4) + 1 = 8 + 1 = 9$$
$$6 \neq 9 \, \chi$$

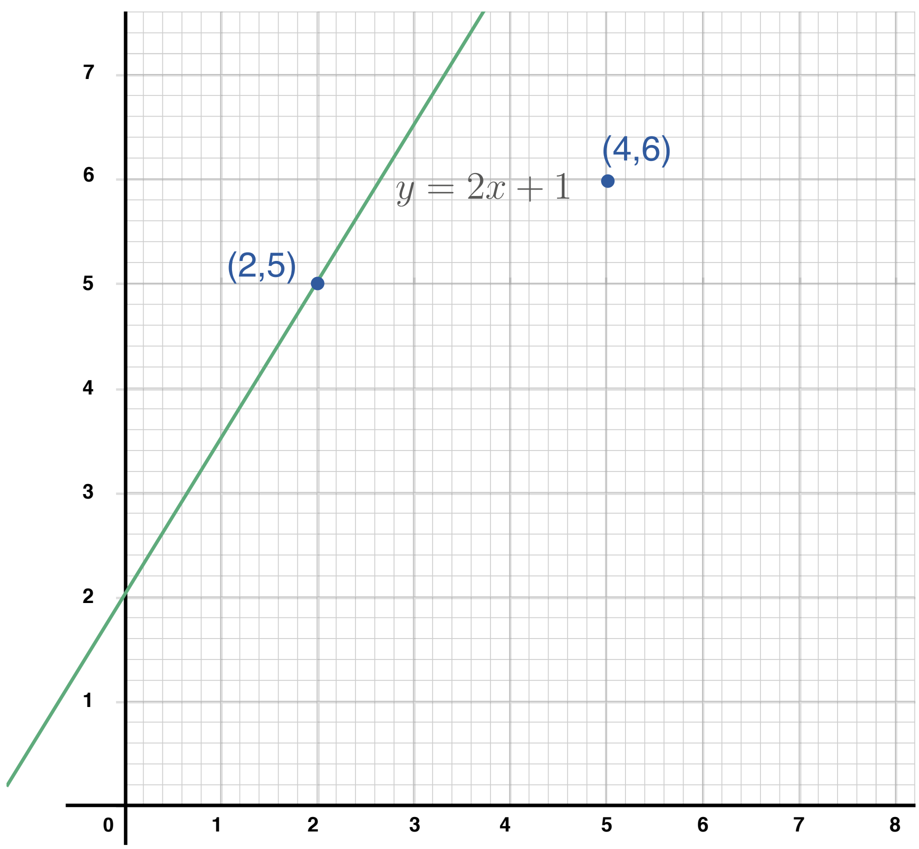


Figura 37. Comprobación que cuando un punto cumple con la ecuación de la recta se encuentra sobre ella.

3.5. Construcción de la ecuación de la recta y sus invariantes

3.5.1. Construcción de la gráfica de la recta

Dada la ecuación general de la recta $y = mx + b$ podemos identificar los siguientes elementos:

$\boldsymbol{x}$: es la variable independiente

$\boldsymbol{y}$: es la variable dependiente

$\boldsymbol{m}$: es la pendiente (inclinación de la recta) que indica la proporción de lo que crece en la variable dependiente (Δy) por cada cierto incremento en la variable independiente (Δx).

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$\boldsymbol{b}$: es el valor de la intersección al eje y, también puede decirse que es el punto de partida, pues cuando $x = 0$

$$y = \cancel{m(0)} + b = b$$

Para entender cómo funciona la recta veamos la siguiente ecuación de la recta.

$$y = \frac{1}{3}x + 2$$

Podemos identificar primero que dado que $b = 2$ la intersección con el eje y está en $y = 2$.

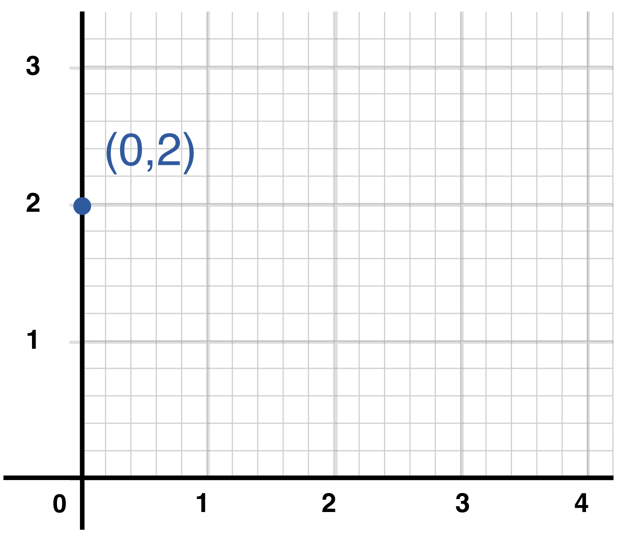


Figura 38. Intersección con el eje y.

La pendiente $m = \frac{1}{3}$ como su fórmula es $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, significa que por cada incremento en la coordenada $\boldsymbol{x}$ $\Delta x = 3$, tendremos un incremento en la coordenada $\boldsymbol{y}$ $\Delta y = 1$.

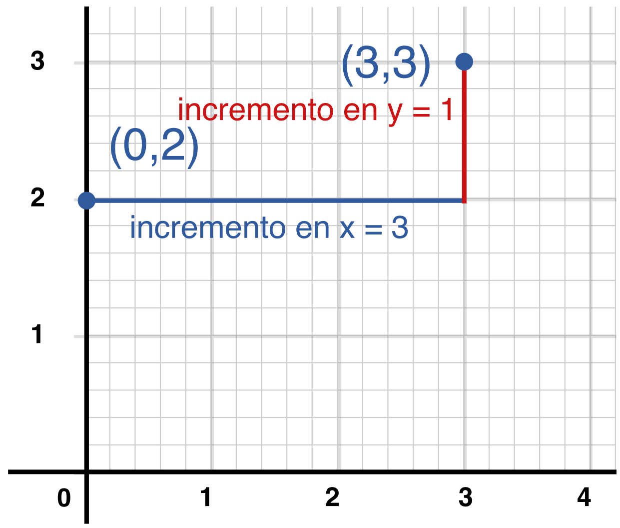


Figura 39. Representación de los incrementos en las coordenadas dadas por la pendiente.

Finalmente, unimos los dos puntos con una recta y tendremos la ecuación de la recta.

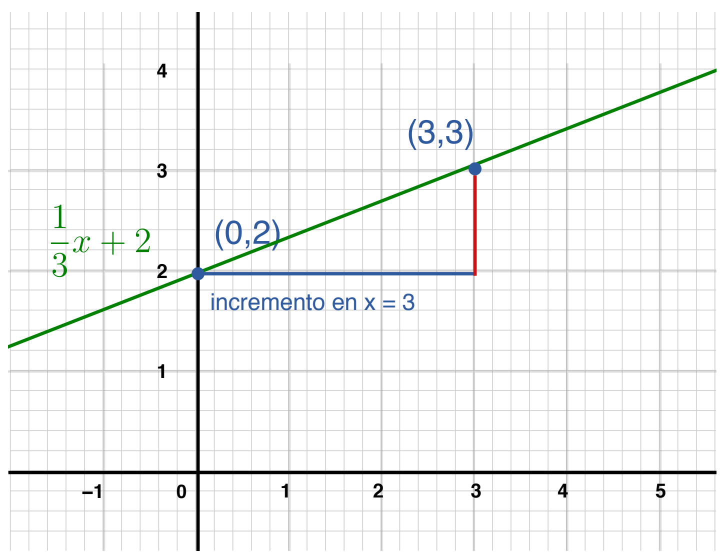


Figura 40. Unión de los puntos por la recta.

3.5.2. Obtención de la ecuación de la recta dado un punto y la pendiente

Una de las condiciones para definir una recta es conocer un punto por donde pasa y tener el valor de la pendiente m. El procedimiento lo explicaremos con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.5

Encuentra la ecuación de la recta con pendiente –3 y que pasa por el punto (3,1).

Solución

Se cuenta con la siguiente información

$x = 3$
$y = 1$
$m = -3$

Sustituimos eso valores en la ecuación de la recta.

$y = mx + b$
$1 = 3(3) + b$
$1 = 9 + b$

Esto nos produce una ecuación de la que podemos despejar el valor de b.

$1 = 9 + b$
$b = 9 + 1 = 10$

Por tanto, la ecuación de la recta es igual a $y = 3x + 10$

3.5.3. Obtención de la ecuación de la recta dados dos puntos

La segunda manera de definir una recta es conocer dos puntos de ésta. El procedimiento lo explicaremos con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.6

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos (–3, –1) y (3,2).

Solución

Lo primero que tenemos que hacer es usar las coordenadas de los dos puntos para calcular la pendiente:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

En donde

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 3 - (-3) = 3 + 3 = 6$$
$$\Delta y = y_2 - y_1 = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta es:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$m = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Finalmente, escogemos cualquiera de los dos puntos y sustituimos los valores para obtener la ecuación de la recta. Usando las coordenadas del punto (3,2) tenemos:

$$y = mx + b$$

$$2 = \frac{1}{2}(3) + b = \frac{3}{2} + b$$

$$b = 2 - \frac{3}{2} = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto con los valores $m = \frac{1}{2}$ de y de $b = \frac{1}{2}$, la ecuación de la recta es:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

3.6. Aplicaciones de la línea recta

La ecuación de la recta se puede asociar a comportamientos lineales, uno de ellos es el MRU. Vamos a estudiar un ejemplo en donde usaremos la graficadora Desmos para resolver el problema.

Ejemplo 3.7

Supón que en una carretera recta en el desierto hay dos terminales de autobuses. A las 10:00 a.m. sale de cada terminal un autobús, ambos a la misma dirección. Uno tiene una rapidez de 70 km/h y el otro de 65 km/h pero parte 15 km por delante. ¿A qué hora alcanzará uno al otro?

Solución

Primero vamos a plantear la ecuación que describe el movimiento de cada autobús. De lo visto en el tema 3.3. recordamos que la ecuación de movimiento se puede describir por:

$$x_f = x_0 + vt$$

En donde:

$$x_f \equiv Posición\, final$$
$$x_0 \equiv Posición\, inicial$$
$$v \equiv rapidez$$
$$t \equiv tiempo$$

Por lo tanto, para el primer autobús los valores son:

$$x_0 = 0\, km$$

$$v = 70\, \frac{km}{h}$$

Por lo que la ecuación queda planteada como

$$x_f = 70t$$

Para el segundo camión los valores son:

$$x_0 = 15\, km$$

$$v = 65\, \frac{km}{h}$$

Por lo que su ecuación queda planteada como

$$x_f = 15 + 70t$$

Ahora, lo que necesitamos es identificar en qué punto se van a encontrar. Sabemos que ambos comportamientos son lineales y pueden representarse por rectas. Entonces el punto de la intersección de ambas rectas será el punto en que ambos movimientos coinciden en posición y tiempo. Para encontrar este punto, nos apoyaremos de una graficadora, este caso usaremos Desmos. Dado que el programa sólo reconoce como variable dependiente a y y como variable independiente a x escribiremos las ecuaciones como:

$$y = 70x$$
$$y = 15 + 65x$$

Al graficarlas tenemos:

El punto de intersección es la coordenada (3,210) donde 3 es el valor de la variable independiente (tiempo en horas) y 210 el valor de la dependiente (distancia en kilómetros). Por tanto, los vehículos se cruzan en tres horas (1:00 p.m.) en el kilómetro 210.

3.7. Movimiento rectilíneo uniforme

Recordando la primera ley de Newton, un cuerpo permanecerá en estado de reposo o de MRU mientras no haya fuerzas que actúen sobre él. Las características de un MRU es una velocidad constante, es decir, que no hay cambios en su rapidez ni cambios en su dirección. La posición de un MRU en función del tiempo siempre deberá de tener un comportamiento lineal pues este se representa por la ecuación:

$$x_f = x_0 + vt$$

Si graficamos la posición contra el tiempo de cuerpos que parten de la posición cero en el tiempo t=0, con velocidades 1 m/s, 2 m/s, 3 m/s y 4 m/s observaremos las si guientes rectas.

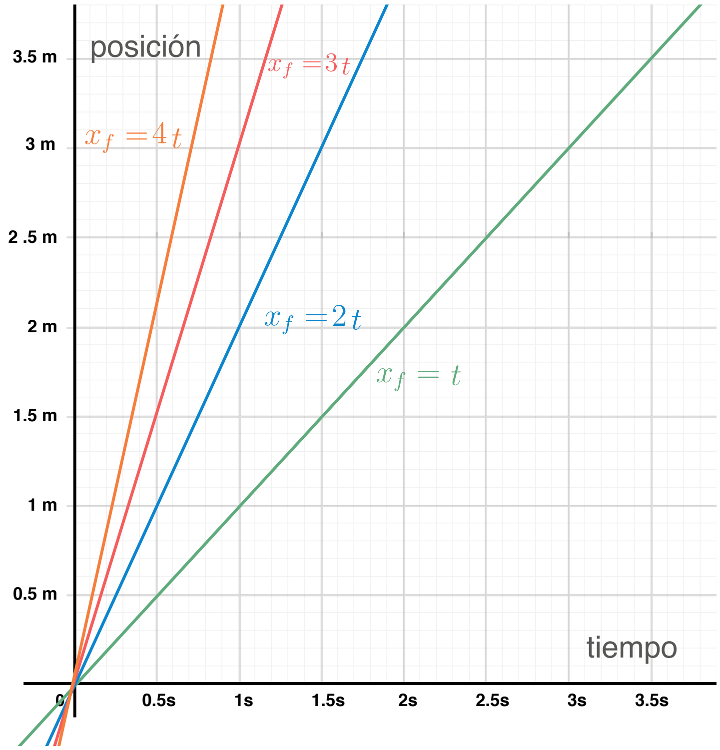


Figura 41. Aumento de la inclinación de la recta al aumentar la pendiente.

Podemos observar que entre mayor es la velocidad, más inclinada es la pendiente de la recta formada, ¿a qué se debe esto?

Si comparamos la ecuación $x_f = x_0 + vt$ con la ecuación de la recta $y = mx + b$ se observan varias similitudes que se pueden mostrar en la siguiente tabla.

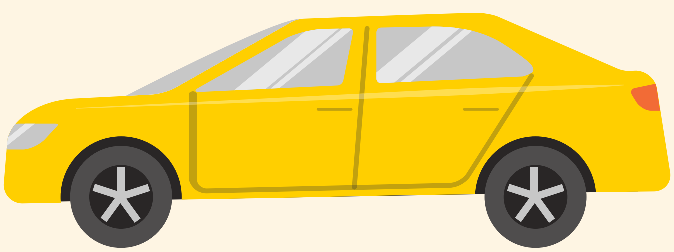
Tabla 12. Comparación de la ecuación de la posición en MRU con la ecuación de la recta.

	$x_f = x_0 + vt$	$y = mx + b$
Punto de partida	x_0	b
Pendiente o tasa de cambio	v	m
Variable independiente	t	x
Variable dependiente	x_f	y

Por este motivo, en la gráfica de posición contra tiempo, el valor de la inclinación indicará el valor de la rapidez, en el caso de un MRU la gráfica será una recta, justamente porque una recta tiene propiedad de mantener una inclinación constante.

Ejemplo 3.8

Un vehículo comienza a avanzar 60 km/h durante dos horas. Entonces se estaciona en un punto por una hora y más tarde se regresa a 30 km por hora sobre la misma calle por otra hora.



a. Representa una gráfica de su posición contra tiempo, la posición del vehículo.

b. Representa en una gráfica de velocidad contra tiempo, la velocidad del vehículo.

Solución

a. Podemos destacar tres fases del trayecto.

1. Avanzar a 60 km/h por dos horas.
2. Reposo durante 1 hora.
3. Retroceder a 30 km/h por una hora.

Primero representemos la primera parte, 60 km/h por dos horas debe comportarse como una línea recta con una pendiente de 60, es decir, que avanza 60 km por cada hora que pasa. Por lo que después de 2 horas deberá haber avanzado 120 km.

$$d = v \cdot t$$

$$d = \left(60 \frac{km}{\cancel{h}}\right)(2\,\cancel{h}) = 120\,km$$

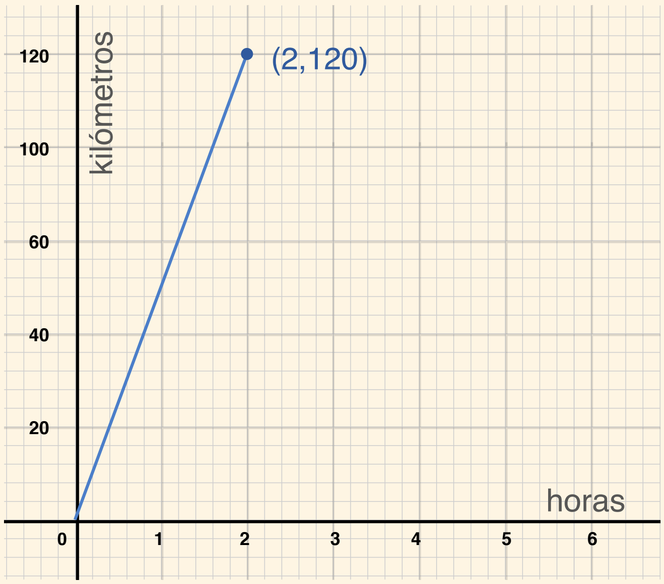


Figura 42. Posición durante las primeras dos horas.

Ahora, para el reposo de una hora, significa que mantiene la misma posición por una hora. Por lo tanto, tendremos una línea horizontal donde el valor de la posición no cambie con una amplitud en tiempo de 1 hora, hasta llegar a la hora 3.

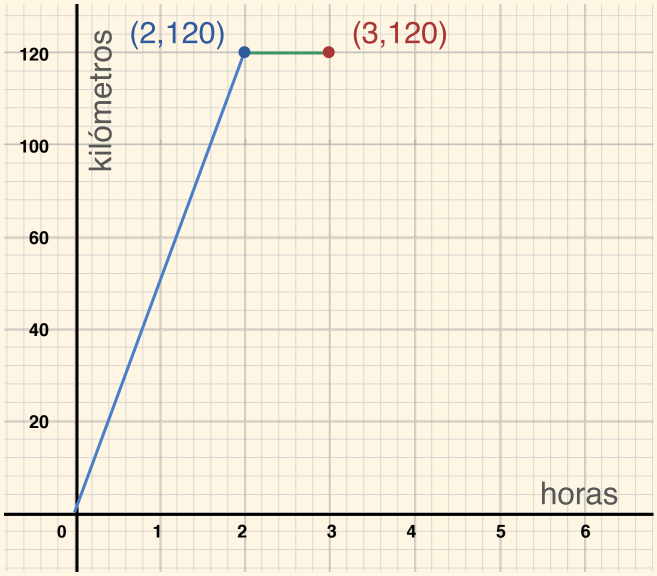


Figura 43. Posición durante la tercera hora.

Finalmente, al retroceder a 30 km/h por una hora, la posición va a disminuir 30 km.

$$d = v \cdot t$$

$$d = \left(-30\frac{km}{\cancel{h}}\right)(1\,\cancel{h}) = -30\,km$$

Por lo tanto, la posición debe terminar en el km 90. Se usa un valor negativo porque la posición disminuye.

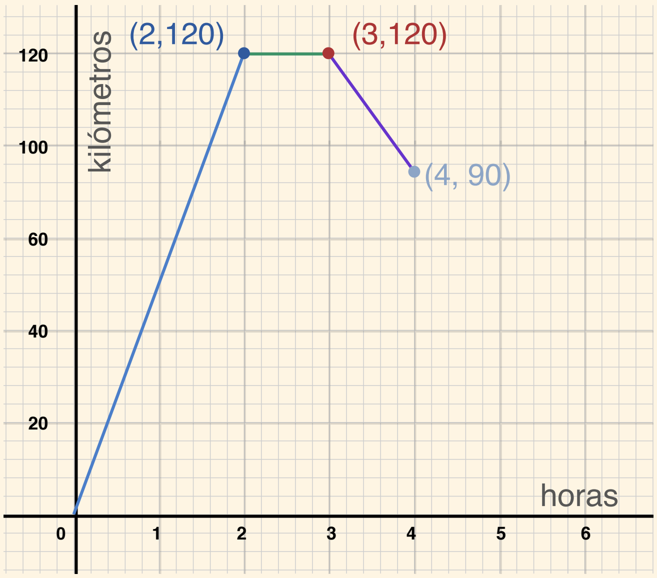


Figura 44. Posición durante la cuarta hora.

b. Para representar la velocidad en función del tiempo de igual manera vemos los tres pasos.

1. Avanzar 60 km/h por dos horas.
2. Reposo durante 1 hora.
3. Retroceder a 30 km/h por una hora.

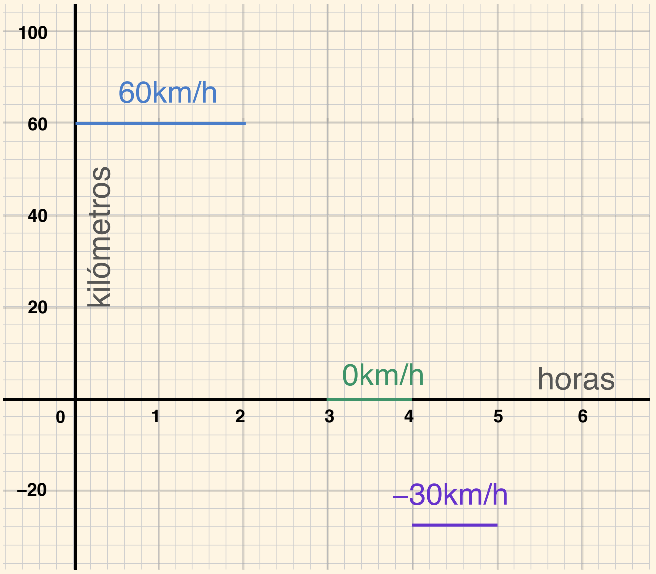


Figura 45. Gráfica de la velocidad contra el tiempo del movimiento del vehículo.

Cierre

En esta unidad aprendiste sobre los triángulos, las medidas de sus lados y sus ángulos, así como las relaciones existentes sobre ellos. Este aprendizaje te permitió estudiar matemáticamente los vectores, los cuales son necesarios para comprender la velocidad y el desplazamiento. Estudiaste al movimiento rectilíneo uniforme y su relación con la primera ley de Newton; además se planteó la ecuación que describe la posición en este tipo de movimientos y su relación con la recta. Finalmente pudiste entender las propiedades en las gráficas que se pueden asociar a cada tipo de movimiento.

Con estos conocimientos estarás listo para enfrentar los retos presentes en la siguiente unidad: Energía en movimiento: movimiento rectilíneo, fuerza y energía. Así, lograrás alcanzar los objetivos de este módulo.

Fuentes

Bueche Frederick. J. *Física general*. 10ª edición, Colección Schaum, México, Editorial McGraw-Hill, 2007, https://higieneyseguridadlaboralcvs2.files.wordpress.com/2013/08/fc3adsica-general-10ma-edicic3b3n-schaum.pdf (consultado el 17 de septiembre de 2019).

Franco García, Ángel, *Estudios de los movimientos*. *Cinemática*, http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica_/cinematica/rectilineo/rectilineo/rectilineo_1.html (consultado el 17 de septiembre de 2019).

Khan Academy, *Matemáticas: Trigonometría*, https://es.khanacademy.org/math/trigonometry (consultado el 17 de septiembre de 2019).

Olmo Nave, R. "Mecánica". *Hyper Physic*, http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/newt.html (consultado el 17 de septiembre de 2019).

Oyetza Elena, *Conocimientos fundamentales de matemáticas: trigonometria y geometría analítica*, México, Pearson, 2007.

Resnick, Robert, Halliday, David y Krane Kenneth, *Física*, 4 a edición, CECSA, México, 1997,https://www.academia.edu/27086444/Fisica_1_-_Resnick_4ta_Edici%C3%B3n (consultado el 17 de septiembre de 2019).

Serway, Raymond, *Física*, tomo 1, 5ª edición, España, McGraw-Hill, 2002.

Tipler, Paul, *Física*, México, Editorial Reverté, 1994.

Tippens, Paul. *Física*, 7ª edición. México, Editorial McGraw-Hill, 2011, https://www.academia.edu/21268584/Fisica_Conceptos_y_Aplicaciones_Paul_Tippens_Septima_Edicion (consultado el 17 de septiembre de 2019).